UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Una introducción al modelamiento de fenómenos físicos a través de funciones

Jorge Eliecer Rondón Duran

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Bogotá, Colombia

2013

Una introducción al modelamiento de fenómenos físicos a través de funciones

Jorge Eliecer Rondón Duran

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en la enseñanza de las ciencias exactas y naturales

Director

Profesor José Reinaldo Montañez Puentes

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Bogotá, Colombia

2013

La mecánica es el paraíso de las ciencias matemáticas, porque con ella se alcanza el fruto matemático.

Leonardo da Vinci

Agradecimientos

A mis estimados estudiantes de primer semestre de Ingeniería y Administración por su participación en el trabajo experimental, sus aportes y observaciones.

A mi director José Reinaldo Montañez Puentes, por su orientación y dedicación, ya que me permitió identificar enfoques interesantes sobre el saber matemático.

Resumen

Un concepto central en el estudio de las matemáticas es el de *función*. El problema está en que los estudiantes al ingresar a sus estudios superiores, no tiene claro dicho concepto, esto radica en que al abordar el tema, por lo general lo que se da es el modelo matemático de algunas funciones, sin explicar su génesis, generando un tratamiento puramente operativo y sin significado, presentando dificultades en la comprensión e interiorización de dicho concepto, entre otros en la distinción de la variable dependiente y variable independiente, en el reconocimiento de una función en otras formas de representación, como fórmulas, tablas y gráficas; así como también el paso de una representación a otra.

El trabajo que se presenta está basado en el estudio de dos fenómenos muy comunes en nuestro entorno como que son: Caída de un líquido por un orificio de diámetro conocido y el desplazamiento de una esfera por un plano inclinado; a partir de los cuales, la idea es construir la función que explica su comportamiento. La parte experimental se desarrolló con una muestra piloto, conformada por estudiantes de primer semestre universitario, en donde a partir de los datos tomados en los experimentos y utilizando algún software (Excel) realizar proceso matemáticos, como la regresión para obtener modelos matemáticos y seleccionar el más adecuado, de acuerdo a algún criterio; que para este caso será el coeficiente de determinación, simbolizado R^2.

La didáctica a utilizar en el presente trabajo, es el aprendizaje activo, en el cual el estudiante es quien participa en la construcción del modelo y por ende en la comprensión e interiorización del concepto.

La meta principal que se pretende con este trabajo, es que el estudiante se acerque lo mejor posible a la función como modeladora de fenómenos físicos, a sus principios, a sus características y por supuesto sus aplicaciones en el mundo de las ciencias exactas y naturales.

Palabras clave: Modelación matemática, pensamiento variacional, relación y función.

Abstract

A central concept in the study of mathematics is that of function. The problem is that students entering their higher education, this concept is not clear, it is that to address the issue, usually what is given is the mathematical model of some functions, without explaining its genesis, generating purely operational treatment without meaning, presenting difficulties in understanding and internalization of the concept, including the distinction of the dependent and independent variable, in recognizing a role in other forms of representation, such as formulas, tables and graphs , and also the transition from one representation to another.

The work presented is based on the study of two common phenomena in our environment that are: Fall of a liquid through an orifice of known diameter and the displacement of a sphere by an inclined plane, from which the idea is to build the function that explains their behavior. The experimental part was developed with a pilot sample, comprised of freshmen college, where from the data collected in the experiments and using some software (Excel) perform mathematical process, such as regression to obtain mathematical models and select the more appropriate, according to some criterion, which in this case is the coefficient of determination, R^2 symbolized.

The teaching to be used in the present The main goal intention with this work is that the student best approach to the function as modeling physical phenomena, its principles, features and of course their applications in the world of natural sciences.t work, is active learning, in which the student is a participant in the construction of the model and therefore in understanding and internalization of the concept.

The intended main goal intention with this work is that the student best approach to the function as modeling physical phenomena, its principles, features and of course their applications in the world of natural sciences.

Keywords:mathematicalmodeling, thinkingvariational relation and function.

Contenido

Pág.

Lista de figuras

Pág.

Lista de tablas

Introducción

Uno de los conceptos más importantes en el estudio de las matemáticas sin duda es el de “Función”,

Por medio de las funciones se puede modelar y predecir el comportamiento de un fenómeno de interés en la economía, en la ingeniería y en las ciencias entre otros.

En los inicios de los programas universitarios, de áreas como Ingeniería, Ciencias Administrativas y Económicas, Ciencias Naturales y Exactas y muchas otras, es innegable el estudio de las funciones, utilizando diferentes formas de abordar dicha temática, tales como las gráficas, la ecuación y las tablas entre otros, como el lenguaje más utilizado, pero en muchas ocasiones los estudiantes no alcanzan la comprensión correspondiente, ya que en general su estudio se enfatiza en manipulaciones de carácter algebraico Pero además se interpreta la función como un ente rígido, sin permitir su interpretación como variación, generando en los estudiantes algunas obstrucciones conceptuales que no permiten que ellos las relacionen con otras áreas del conocimiento, por ejemplo con las ciencias, lo cual no posibilita que los estudiantes interpreten la función como modeladora de fenómenos físicos.

El propósito de este trabajo es hacer un acercamiento ala interpretación de la funcióndentro de un contexto natural, identificando las variables de estudio, discriminando la variable independiente y dependiente, con el fin de construir leyes empíricas que describan el comportamiento de fenómenos físicos naturales, tales como la caída de un líquido por un orificio y el desplazamiento de un objeto por un plano inclinado.

Se sabe que existen diversos y muy variados estudios sobre el concepto de función, desde los tratados de astronomía hecha por los babilonios, los estudios realizados por Descartes y Fermat, hasta los estudios de Dirichlet y Lobachevski, todos en los cuales el factor principal son las relaciones funcionales y la variabilidad. La forma de explicarlo se fundamenta en representaciones gráficas y procesos algebraicos, ignorando sus orígenes; como se dijo anteriormente, las relaciones funcionales y la variabilidad. Por otro lado, no se conocen evidencias; en nuestro medio, sobre la construcción de funciones que permitan modelar situaciones del medio que nos rodea, tales como las que hemos referenciado.

Los modelos matemáticos son un tipo de modelo científico que emplea formalismo matemático, que para los casos que nos ocupan serán funciones. Estas describen idealmente el comportamiento de un fenómeno el cual se construye a partir de datos obtenidos en un experimento o la observación del fenómeno.

Un aspecto que es pertinente resaltar, es la forma de aprender adecuadamente el concepto de función, en las metodologías actuales, lo que se busca es que el estudiante sea partícipe activo de su propio aprendizaje, lo que se consigue por la participación directa del estudiante sobre el proceso, haciendo que los sistemas didácticos se centren más en los estudiantes, estimulando así el llamado *aprendizaje activo*. Entre con más independencia actúen los estudiantes en los entornos de aprendizaje, mayor es la probabilidad de enriquecer la acción didáctica y de despertar el deseo de aprender.

En síntesis, el trabajo pretende acercarse ala interpretación de la función en el contexto de la variación a partir de fenómenos físicos, partiendo de la observación de fenómenos sencillos, tomando datos, haciendo procesos algebraicos manuales y también haciendo uso de la tecnología, con más precisión usando el proceso matemático de regresión.

Finalmente, el trabajo se presenta en cuatro capítulos. En el primero se presenta los aspectos históricos, en el segundo los aspectos de carácter disciplinar y de modelamiento, en el tercero se presentan los aspectos pedagógico y didáctico y en el capítulo cuatro la propuesta didáctica.

1. Aspectos históricos del concepto de función

El origen del concepto de función, ha tenido divergencias debido a que algunos estudiosos lo ubican en la antigüedad, cuando hacen referencia a ciertas *relaciones funcionales* en algunas operaciones matemáticas, como por ejemplo los tratados de astronomía de los babilonios, el gran trabajo de Ptolomeo de Alejandría (Egipto), conocido como el Almagesto. Otros ubican el nacimiento del concepto en la edad media, tomando como referencia los trabajos de Descartes, quien con Pierre de Fermat, dieron origen a la geometría analítica. Los más escépticos ubican su creación en el siglo XIX a partir de las definiciones dadas por Dirichlet y Lobatchevsky.

La matemática como ciencia ha tenido su historia, su fundamento teórico y su evolución, de igual manera, dentro de las matemáticas el concepto de *función* se ha tratado desde la antigüedad, aunque no tan sofisticado como en la actualidad, pero era parte de los procesos matemáticos por su necesidad para comprender fenómenos naturales. Así el concepto de *función* adquiere importancia dentro de la ciencia matemática por su gran utilidad. Pero no ha sido fácil encontrar una definición única, debido a su versatilidad conceptual, desde Galileo, quien fue uno de los primeros en utilizarlo, hasta los matemáticos e investigadores modernos, dicho concepto ha inquietado a propios y extraños, ya que como todos sabemos el mundo es cambiante y dicho cambio se ha asociado con explicaciones matemáticas, siendo las funciones la manera formal de hacerlo.

Para estudiar este concepto es pertinente ocupar las dimensiones evolutivas y conceptuales, así identificar las formas en que se puede enunciar el concepto de *función* y que éstas sean coherentes y articuladas. Recorrer la historia del concepto es interesante porque nos permite conocer los diferentes enfoques que le han dado, de acuerdo a la misma evolución que ha tenido la matemática. Un factor que quizás no ha sido tan relevante para incluirlo en esta evolución del concepto es la didáctica, siendo esta un elemento que permite acercarse de la mejor manera posible a dicho concepto.

En general, el trabajo que nos ocupa es buscar una forma dinámica, concreta y motivante para que el concepto de *función* quede claramente comprendido e interiorizado, desde lo histórico, disciplinar, conceptual y empírico.

1.1 Evolución histórica del concepto de función

Se podría decir que la inquietud de los estudiosos a través de la historia, ha sido la obtención de modelos matemáticos que permitan comprender de la mejor manera la interacción entre ciertas magnitudes, e identificar la dependencia entre las mismas, buscando expresar dicha interacción lo más cerca de la realidad. Las formas que se han utilizado durante la historia de la humanidad han sido, interpretaciones visuales, expresiones verbales, la tabulación, las gráficas o mediante fórmulas; como la forma más abstracta.

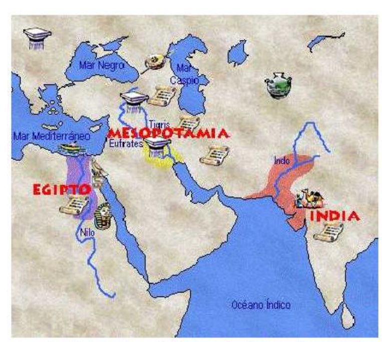
El origen del concepto de función, ha tenido divergencias debido a que algunos estudiosos lo ubican en la antigüedad, cuando hacen referencia a ciertas *relaciones funcionales* en algunas operaciones matemáticas, como por ejemplo los tratados de Astronomía de los Babilonios, el gran trabajo de Ptolomeo de Alejandría (Egipto), conocido como el Almagesto. Otros ubican el nacimiento del concepto en la edad media, tomando como referencia los trabajos de Descartes, quien con Pierre de Fermat, dieron origen a la Geometría Analítica. Los más escépticos ubican su creación en el siglo XIX a partir de las definiciones dadas por Dirichlet yLobachevski.

Sin el ánimo de sesgar hacia una de las tres tendencias a que se hace referencia, la idea es viajar a través de la historia y darle el toque de importancia a dicho concepto en cada una de ellas y los aportes dados en el desarrollo del mismo, tratando de comprender cuál es la más completa y cercana a la realidad.

Los periodos en que se han clasificado la evolución del concepto de función, tomado del trabajo dado por Youschkevitchse explican a continuación [1].

1.1.1 El mundo antiguo. En esta época se realizaron estudios sobre la dependencia entre dos cantidades, el concepto de función y variable, no existía. Se analizaron fenómenos de cambio y a través de la tabulación pudieron determinar leyes cuantitativas. Las cantidades se describían verbalmente o por medio de gráficos. El conteo implicaba una correspondencia entre un conjunto de individuos u objetos, dando el sentido de secuencia, así que el origen del concepto de función está ligado implícitamente al concepto de número.

BABILONIA: Antigua región de la baja Mesopotamia, del siglo VII a. C. recordada por los famosos “Jardines Colgantes” una de las maravillas de la antigüedad, hoy día IRAK. Bajo el gobierno de Darío I el Grande, Babilonia se convirtió en un centro de desarrollo y avance científico, especialmente en astronomía y matemáticas. Tenían una aritmética y geometría elemental, de tipo empírico. Muestran ingeniosos métodos de cálculo; además, incursionan en el campo del álgebra, lo que se observa por medio de tablas de cómputo y una serie de problemas resueltos, la mayoría de tipo práctico, de allí lo empírico de



Fuente: http://www.proyectosalonhogar.com/Civilizaciones/Civ_Mesop.htm sus métodos. No se conoce una explicación o desarrollo teórico de dichas soluciones, lo que hace inferir que el concepto de variable y función no existía.

Expresiones Numéricas en Piedra

Fuente.Wikipedia

Es pertinente aclarar que a los babilonios se les resalta por sus aportes en la astronomía, en donde se puede decir que surgió el germen remoto de función, ya que se encontraban relaciones entre dos características, tales como *observaciones* y *profecías*. Se dedicaron a hacer observaciones sistemáticas de fenómenos que se repetían periódicamente, enlazándolos por medio de relaciones aritméticas. Las tablillas del periodo Seléucida dejan ver relaciones entre los periodos de visibilidad de un planeta y el ángulo que éste forma con el sol.

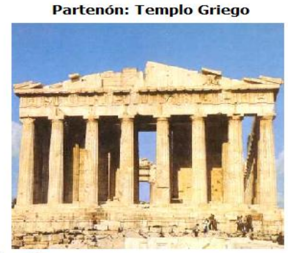
Su predominio sobre la aritmética en las mediciones tomadas empíricamente y las interpolaciones lineales y geométricas, encontrados en algunos libros, dejan ver el carácter avanzado en la astronomía que tenían los babilonios.

Aunque los conceptos de función no existian como tal, se les reconoce a los babilonios, que trabajaron relaciones entre cantidades y lasrepresentaron por medio de tablas.

GRECIA: La antigua Grecia, se desarrolló en varias etapas, iniciando con la *edad oscura*, que va de 1.100 a. C. hasta 750 a. C. Se observa plasmada la geometría sobre cerámicas, sigue la *edad arcaica*, la *edad clásica*, el ***periodo helenístico*** y la Grecia Romana. Se considera que en el siglo VI a. C. los grandes matemáticos **TALES** y **PITAGORAS**, fueron los fundadores de la geometría y aritmética, respectivamente, todo tras los viajes de éstos a Egipto. El periodo helenístico, siglo III a. C. (323-146 a. C.) lo llamarón el siglo de oro de las matemáticas griegas, en donde Euclides con sus Elementos y Apolonio con las cónicas en Alejandría y Arquímedes con sus aportes en la física en Siracusa, fueron quienes motivaron el nombre que le dieron a dicha época.

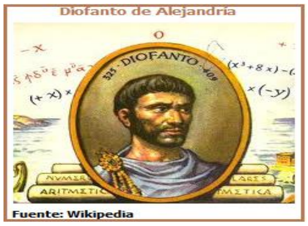
De los análisis dados por los griegos, merecen resaltar: La idea de proporción, el problema de la inconmensurabilidad, la disociación entre número y magnitud. La ausencia del concepto de número racional, dificulto la comprensión de razón y fracción como una misma cosa. En este orden de ideas, el análisis de las proporciones fue una barrera para la búsqueda del concepto de función, ya que ellos, utilizaban formas homogéneas en las proporciones que planeaban, por ejemplo longitud-longitud, area-area, etc.Sin embargo los Pitagóricos intentaron buscar relaciones cuantitiativas de dependencia entre variables físicas, tales como longitudes de cuerdas y tono de lasnotas emitidas en estudios de acústica.

Partenón: Templo Griego



Fuente:
http://www.um.es/docencia/pherrero/mathis/grecia/PARTENON.htm

Los pitagoricos tenían como idea fundamental “Todo es Número” que se soporta en la existencia de la unidad indivisible. La paradoja de zenon y el descubrimieno de la inconmensurabilidad, debilitaron la teoría pitagórica, lo que llevó a separar los conceptos de n*úmero* y *magnitud*. Así los números y las razones entre enteros positivos se pueden discretizar, mientras que las magnitudes se pueden expresar bajo el contexto de la continuidad, lo cual conlleva a la idea de magnitud variable.



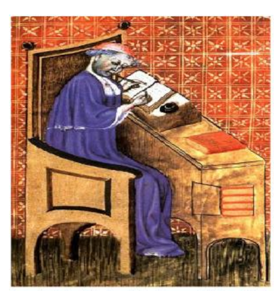
Fuente: Wikipedia

Aunque los griegos no se ocuparon del estudio del movimiento, tampoco del cambio desde el enfoque cuantitativo, ellos tenían la idea de cambio y de cantidad variable, pero les faltaba teorizarlo, ya que carecían de elementos matemáticos para hacerlo, entre los cuales es pertinente destacar, ausencia de lenguaje simbólico, ellos usaban solamente el lenguaje retórico. Por otro lado, el carácter predominantemente geométrico que desarrollaron, no dejaba ver claramente el concepto de función. Sin embargo es interesante destacar a **Diofanto** que intento por el lenguaje retórico, definir lo que era una dependencia funcional.

1.1.2 La edad media. Históricamente la edad media se ubica entre la caída de Roma; es decir, el final del imperio romano allá por los años 476 d. C. hasta la caída de constantinopla por los turcos en 1.453 (siglo XV), aunque se consideró un periodo de oscurecimiento, creyendo que las matemáticas estaban estáticas, pero fueron los árabes que recuperaron buenas obras de los griegos, dándole gran importancia a la gran riqueza de la aritmética y sentaron las bases de una nueva área de las matemáticas, *el álgebra*.

En esta época una de las mayores preocupaciones era el estudio de los objetos sujetos al cambio, especialmente el movimiento, cosas como porque sopla el viento, porqué cae la lluvia, porque los planetas brillan y muchas otras, inquietaron a los pensadores para buscar las respuestas correspondientes, lo que llevó a analizar fenómenos como la luz, el calor, el movimiento, específicamente distancia y velocidad media. Los anteriores motivaron las llamadas cantidades variables independientes y dependientes, pero no tenían definiciones específicas sobre las mismas, siendo así el movimiento quien le dio un leve impulso al concepto de función, la cual era descrita verbalmente o por medio de gráficos, describían sus propiedades, pero aún les faltaba describirlas por medio de fórmulas, quizás por el prematuro desarrollo del álgebra. Es pertinente resaltar el gran aporte de los árabes, quienes desarrollaron la mayoría de las funciones trigonométricas, a pesar de sus limitaciones.

Los historiadores de la matemática reconocen en el frances **Nicole Oresme**(1.323 – 1.382), matemático, físico y astrónomo, quien dio la primera aproximación al concepto de función, al describir leyes naturales como relaciones de dependencia entre dos magnitudes, fue el primero en usar diagramas de manera sistemática para representar magnitudes que varian en el plano. En su obra desarrollá lo que llamó “Teoría sobre las latitudes de las formas” en donde utiliza segmentos rectilineos para


Fuente: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a2/Oresme-Nicole.jpg

representar todo lo que varía, ya que todo lo medible se imagina como una cantidad contínua. Oresme traslada al plano lo que hasta entonces los geografos habían hecho sobre la esfera. Para los ejes, respeto los nombres, dando al eje horizontal el nombre de longitud y al vertical latitud. Un caso fue la representación de la velocidad a lo largo del tiempo. Se considera a éste frances, uno de los mayores pensadores el siglo XIV.

1.1.3 La edad moderna. Se puede decir que en el siglo XVI comienza la edad moderna, cuando por medio de la revolución científica, se pone atención a los fenómenos de la naturaleza, enfatizando en las relaciones que hay entre las variables que los determinan; además, se podían expresar en términos matemáticos. Se requería hacer comparaciones y relaciones entre las variables, expresarlas numéricamente y representarlas de alguna forma geométrica adecuada. A finales del siglo XVI e inicios del siglo XVII se da un gran impulso al estudio de las funciones, a partir de los siguientes desarrollos matemáticos.

a. La extensión del concepto de número al de número real, se dio un gran avance sobre lo que era un número real.

b. La definición de número complejo, dado por el matemático e ingeniero hidráulico italiano, Rafael Bombelli, (1.526 – 1.572) quien en su trabajo de álgebra le da importancia a las llamadas raíces imaginarias.

c. La creación del álgebra simbólica, por los grandes matemáticos Víetá y Descartes.

d. El interés de estudiar el movimiento como tema central de la ciencia, motivado por Keppler y Galileo.

e. La unión entre el álgebra y la geometría, cuyos gestores fueron Fermat y Descartes.

En la trayectoria histórica de las matemáticas, se sabe que hasta el siglo XVII la geometría estaba por encima del álgebra, pero con los trabajos de Viéta y Descartes, los papeles se invierten, en el momento que utilizan el álgebra para resolver problemas de construcciones geométricas.

http://es.wikipedia.org/wiki/Fran%C3%A7ois_Vi%C3%A8te

Francisco Viéta, matemático francés, (1.540 – 1.603) uno de los precursores del Álgebra, su trabajo se ocupó en utilizar el álgebra para estudiar las igualdades y las proporciones entre magnitudes; además, propone el uso de letras para representar las variables, también propone el uso de letras para representar los parámetros de una ecuación. Denomina a esta etapa *La Zetética*, donde escribe las magnitudes conocidas como consonantes y las magnitudes desconocidas como vocales. La siguiente etapa la llama *Posística*, en donde se hacen transformaciones y discusiones sobre la ecuación, en ésta se busca una relación característica del problema. La última etapa llamada*análisis rético*, en donde se vuelve al problema inicial, dando una solución por medio de una construcción geométrica.

http://www.salonhogar.com/est_soc/mundo/bio_estran_old/renedescar.htm

La obra de **Renato Descartes**, (1.596 – 1.650) da un gran avance al desarrollo de la matemática moderna, uno de los aportes fue dismunuir la geometría de figuras, simultaneamente buscaba dar significado al álgebra a través de la geometría. Establece que cualquier curva en el plano puede ser expresada en términos de ecuaciones y a su vez cualquier ecuación que relaciona dos variables, se puede representar geométricamente en el plano, por medio de una curva, de esta forma es que se le atrubuye la introducción de función de manera analítica. Buscó un procedimiento estándar para resolver los problemas algebraicos y así encontrar las raíces. Fue el primero en aclarar que una ecuación de dos variables *X* e *Y*, es la forma de demostrar la dependencia entre cantidades variables, de tal manera que el valor de una de las variables, se puede hallar a partir del valor de la otra. En dicho trabajo deja ver claramente los conceptos de v*ariable* y f*unción*. Clasificó las curvas algebraicas según el grado y reconoce que los puntos de intersección de dos curvas se obtienen resolviendo de manera simultanea, las ecuaciones que las representan. Clasificó las curvas en geométricas y mecánicas. Las curvas geométricas las define como aquellas que se pueden expresar mediante una única ecuación algebraica. Las curvas mecánicas a todas las demás. Esto le dio al matemático y astronómo escocés James Gregory (1.638 – 1.675) clasificar las funciones como se conocen en la actualidad; algebraicas y trascendentes. Es pertinente aclarar que los estudios de Descartes solo incluyeron las funciones algebraicas, dejando resagadas a otras funciones, entre éstas las curvas mecánicas, que no se podían analizar por el método que proponía, alejando un poco la relación de las matemáticas con la física.

Un gran científico que contribuyó al desarrollo del concepto de función fue **Galileo Galilei**, (1.564 – 1.642) astrónomo, matemático, filósofo y físico italiano, en sus aportes referente a funciones, le dio el valor numérico a las representaciones gráficas, a las leyes de movimiento les incorporó el lenguaje referente a las proporciones, para dar el sentido de variación directa e indirectamente proporcional.En su obra se observan diversas expresiones de relaciones funcionales, lo que deja ver su interés por el estudio de las variables y por ende de las funciones. Se considera el gestor de la ciencia moderna, ya que estudió el movimiento de manera cuantitativa, su mayor aporte se da en diseñar experimentos utilizando ingeniosos instrumentos para tomar medidas que le permitieron establecer leyes entre magnitudes, que mostraban verdaderas relaciones funcionales. Por su enfoque práctico, se le considera el padre de la experimentación, cuyo fundamento era que un principio para que sea ley debía ser demostrada experimentalmente.

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Galileo_by_leoni.jpg

El desarrollo del cálculo diferencial e integral, fue motivado por la aparición de la geometría analítica, es así que con la aparición de ésta nueva ciencia matemática, se generó la revolución del pensamiento matemático, pero el estudio del cálculo requiere referenciar de manera explícita el concepto de función y, por supuesto obliga hablar de Newton y Leibniz.

http://es.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton

Isaac Newton (1.642 – 1.707) matemático y científico inglés, desarrolló el concepto de función a través de series infinitas de potencias, aumentando el espectro del estudio de las funciones más allá de las que Descartes había analizado, convirtiéndose en el método fundamental para el estudio de las funciones. Uno de sus trabajos memorables son el método de *fluxiones* y las series infinitas, escritos en 1671 y publicados en 1736 y donde deja ver los principios el cálculo infinitesimal. Utiliza la palabra *fluxión* para representar cualquier relación entre variables, las ideas básicas de este trabajo las plasma por medio del estudio de la mecánica. Define el movimiento
$x = f(t)$, siendo x la distancia y t el tiempo, lo que caracteriza dicho movimiento es la velocidad definida como el limite del cociente $\Delta x/\Delta t$, a dicha velocidad con la que varia x a través del tiempo, es a lo que Newton llamó fluxión de x, asume las variables x e y como dependientes de una variable primitiva $t,$ es así como Newton le da un gran impulso al concepto de función.

Fuente: http://es.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Leibniz

Contemporáneo a Newton, el gran filósofo y matemático alemán **Gottfried W. Leibniz** (1.646 – 1.716) de la segunda mitad del siglo XVII y quien constribuyó de manera explícita y decisiva al concepto de función.Entre sus primeros estudios se destaca el estudio de las series infinitas, en 1673 observó que determinar la tangente de una curva en un punto, depende de la razón entre las diferencias de las ordenadas y de las abscisas, cuando estas últimas tienden a cero, simbólicamente $m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, también introdujo la notación de diferenciales dx, dy y el símbolo $\int f(x)dx$ para la integral. Leibniz hizo referencia al término de función en el año 1673 en un manuscrito sobre un problema del cálculo de ordenadas a partir de ciertas propiedades de la tangente, afirmando que una tangente es una función de una curva. Introduce las palabras c*onstante, variable, coordenadas y parámetro*, en términos de un segmento de constante arbitraria o cantidad. Se debe aclarar que Leibniz no utilizó el concepto de función como lo conocemos en la actualidad, ya que para él una curva estaba conformada por un número infinito de tramos rectos infinitamente pequeños.

Entrando al siglo XVIII el análisis matemático adquiere gran importancia dentro del mundo de las matemáticas, perdiendo el carácter geométrico y mecánico, a favor de la aritmetización y específicamente el uso exclusivo del álgebra, fue tal la fuerza del análisis como disciplina, que la mecánica se consideró como parte de éste. Un caso que explica lo anterior, es que mientras para Newton una fluxión de una cantidad era la velocidad de su cambio, para Lagrange; de la era del análisis, la velocidad era la derivada de la función que representa la distancia a partir del tiempo. Así, es pertinente destacar a aquellos matemáticos que dieron fortaleza al concepto de función desde sus estudios.

Jean Bernoulli; llamado también Johann Bernoulli, (1.667 – 1.748) de la dinastía de los Bernoulli, matemático, médico y filósofo suizo. Se destaca por ser profesor del gran matemático Leonard Euler. Fue quien dio la primera definición explícita de función como una expresión analítica, basandose en los principios de Leibniz, a quien defendió en sus ideas y potenció dichos principios, en 1697 fue profesor de la universidad de Groningen. Con sus conocimientos enriqueció el cálculo y lo difundió por toda europa. Las ideas de Johann Bernoulli fueron recopiladas en el libro: *L'Analysi des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, publicado en 1696 por el matemático francés Guillaume Francois Antoine, Marquis de L'Hopital, de esto se debe resaltar que el método de Bernoulli en la evaluación de límites para formas indeterminadas por medio de diferenciaciones repetidas, se conoce en la actualidad como la regla de L'Hopital.

Fuente http://en.wikipedia.org/wiki/Jean_Bernoulli

Fuente: http://es.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler

Para hablar de funciones en el siglo XVIII, se debe resaltar los aportes significativos que dio el gran matemático **Leonhard Euler** (1707 - 1783), nació en Basilea –Suiza y murió en San Petersburgo- Rusia, considerado el matemático más productivo de todos los tiempos, se puede decir que el siglo XVIII es el siglo de Euler, ya que la matemática del siglo XIX se desarrolló en torno a la obra de éste, ésta última es tan inmensa que sería interminable hablar de la misma, pero es pertinente nombrar algunas de nuestro interés: Las funciones exponencial y logarítmica, las funciones trigonométricas, las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, las funciones e integrales elípticas, entre otras. En 1735 en San Petersburgo expone uno de sus primeros triunfos que le dio reputación en el mundo matemático, cuando obtiene la solución a la suma $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$.
Euler utilizaba el símbolo *p* para representar el número *π*, pero para esta ocasión utilizó el símbolo *c* que era el que utilizaba su maestro Johann Bernoulli. A partir de 1741 se radica en Berlin y su primer trabajo es sobre números primos, pero que el llamó la atención fue su famosa ecuacion de Euler, que la presenta en el libro sobre cálculo de variaciones: $\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)=0$. La obra representativa escrita en 1744 y que tuvo gran influencia en el siglo XIX fue la titulada: "*Introdactio in analisin infinitorum*" presentada en 2 volúmenes, en el primero discute ampliamente el concepto de función, describiéndola como: "*Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta en cualquier forma a partir de esta cantidad variable y de números o cantidades constantes*". En el segundo expone claramente las funciones exponencial, logarítmicas y circulares, allí Euler presenta una de las funciones más importantes de las matemáticas: La función exponencial natural (base e) por medio de serie de potencias: $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$. Al reemplazar a
$x = 1$, obtiene una expresión para el valor del número e conocido como el número de Euler, en homenaje a su descubridor: $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots$

Euler inicia el estudio con la definición de función algebraica, llamada así porque las operaciones que se hacen sobre la variable independiente son exclusivamente algebraicas, éstas a su vez se dividen en dos clases: **Racionales**; en donde sólo intervienen las cuatro operaciones básicas (suma, resta,producto, cociente). **Irracionales**, en las que interviene; además de las operaciones básicas, las raices.

De la gran sabiduría de Euler, se destaca que define las *funciones trascendentes*, tales como la exponencial, logarítmica y trigonométrias, las cuales están dadas por series, como se dio anteriormente con la función exponencial natural, esta es la gran diferencia con las funciones algebraicas. Define las funciones reales enteras o polinómicas a todas aquellas que se puedan descomponer en factores de primero y segundo grado, con coeficientes reales. En general para Euler todas las funciones dadas por expresiones analíticas, admiten un desarrollo por series.

En el prefacio de otro de sus trabajos: *Institutiones Calculi Defferentialis*, Euler deja ver una definición más amplia y es muy similar a la que conocemos en la actualidad: "*Si ciertas cantidades dependen de otras cantidades de tal manera que al cambiar estas últimas las primeras también cambian, entonces las primeras cantidades se llaman funciones de las últimas. Esta denominación es de naturaleza muy amplia y comprende todo método por medio del cual una cantidad podría estar determinada por otras. Si, por lo tanto, x denota una cantidad variable, entonces todas las cantidades que dependen de x de alguna manera o están determinadas por x son llamadas funciones de x*".

Vale la pena resaltar que es aquí donde Euler introduce la notación $f(x)$ para denotar que f es una función que depende de la variable x.

Desde la perspectiva de la teoría de funciones a Euler se le destaca; además de lo referenciado, por estudiar detalladamente las funciones exponencial y logarítmica, por ejemplo introduce el logaritmo de x con base a ($Log_a(x)$) como el exponente y tal que $a^y = x$, siendo la primera vez que se interpretan los logaritmos como exponentes. Referente a las funciones trigonométricas, en la obra *Introdactio,* Eulerdefine las funciones seno y coseno de la siguiente manera: *senθ y cosθ denotan el seno y coseno del ángulo central en un círculo unitario que subtiende un arco de longitud θ. Esto equivale a decir que senθ y cosθ son el seno y coseno de un ángulo de θ radianes en un círculo de radio uno*. Así estableciendo las propiedades básicas para seno y coseno; identidad fundamental, las identidades de suma – resta y la identidad de De Moivre, desarrolla un procedimiento que conlleva a definir las funciones seno y conseno con una serie:

$sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$ y $cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$


Fuente: http://en.wikipedia.org/wiki/J.B._Fourier

Aunque los aportes de Euler al concepto de función fueron determinantes, se debe seguir en la historía para conocer otros aportes a la definición de tan importante concepto matemático. Entrando en el siglo XIX merece reconocer el trabajo de Fourier, **Jean-Baptiste-Joseph Fourier** nació el 21 de marzo de 1768 en Francia y murió también en Francia el 16 de mayo de 1830, dentro de sus trabajos se destacan las llamadas series trigonométricas más conocidas como series de Fourier, quien amplio la discusión sobre lo que es una función, para él ésta última no requieren ser representadas por una expresión analítica, en su trabajo sobre teoría analítica del calor, comenta: "*En general la función $f(x)$ representa una sucesión de valores u ordenadas,*

cada una de las cuales es arbitraria … No suponemos que estas ordenadas estén sujetas a una ley común; se suceden una a la otra de cualquier manera, sea la que fuere”. Trabajo con funciones que tenían un número finitos de discontinuidades en cualquier intervalo finito; además, implícitamente apoyaba la afirmación de que una función puede ser representable por una expresión analítica, aunque ésta fuese una serie de Fourier.
Surge la inquietud de si las funciones definidas tales como las algebraicas y las trascendentes serían el prototipo, ya que las propiedades de las funciones algebraicas no podían cumplirse para todas las demás funciones, así la reflexión sería: Q*ue realmente es lo que se quiere decir por función*, pero también aparecen otros interrogantes: Continuidad, diferenciabilidad, integrabilidad, entre los más destacables.

Fuente: http://en.wikipedia.org/wiki/Johann_Peter_Gustav_Lejeune_Dirichlet

Un discípulo de Fourier, **Johann Peter Gustav LejeuneDirichlet**, matemático alemán (1805 – 1859) a quien se le atribuye la definición moderna de función. Hizo referencia a funciones continuas en términos de serie de funciones completamente arbitrarias en el mismo sentido que lo planteó Fourier, en 1837 propone una definición de función bajo los siguientes términos: *Si una variable y está relacionada con otra variable x, de tal manera que siempre que se atribuye un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente x.* Considera que la regla es completamente arbitraria y para mostrarlo, define la llamada *función de Dirichlet*: Sea a y b números reales diferentes, ahora si x es racional, entonces $y = a$, si x es irracional, entonces $y = b$,dicha función es discontinua para todos los valores de $x\,y$, por lo tanto no es diferenciable para ninguno de éstos. La definición formal actual de función se mantiene bajo estos principios.Anécdota importante es que Dirichlet tomó la cátedra dejada por Gauss debido a su muerte y entre sus estudiantes tenemos a Ferdinand Eisenstein, Kronecker y Lipschitz, que a la postre dejaron también legado en la ciencia matemática.

Con Dirichlet, el concepto de función estaba definida, ya que contemplaba los términos analizados por los matemáticos, como variable independiente, variable dependiente y regla, que son términos que aún se mantienen en la definición moderna, sin embargo hay otros aportes que son menester mencionarlos.

Fuente: http://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy

Augustin Louis Cauchy, matemático francés, nació en agosto de 1789 y murió en mayo de 1857, fue el pionero del análisis, le dio la rigurosidad al cálculo infinitesimal. En 1821 define una variable como sigue: *Se llama variable a una cantidad que se considera tiene que tomar sucesivamente muchos valores deferentes uno de los otros*. Referente al concepto de función afirma: *Cuando se relacionan cantidades variables entre ellas de modo que estando dado el valor de una de ellas, se puede determinar los valores de todas las otras. A las que se les define el valor la llama variable independiente y la que se les determina el valor función*. Considera que una función se puede especificar por medio de una serie infinita.

Dentro de su trabajo también estudio los conceptos de límite y continuidad, afirmando que el límite está basado en consideraciones puramente aritméticas: *Cuando los valores sucesivos asignados a una variable se acercan indefinidamente a un valor fijo de modo que terminan por diferir de él por tan poco como se desee, éste último es llamado límite de los otros*. Referente a la continuidad, considera que se debe conocer las propiedades de las cantidades infinitamente pequeñas, para los cual afirma: *Se dice que una variable se hace infinitamente pequeña cuando su valor numérico decrece indefinidamente de modo tal que converge al límite cero*. A dichas variables los llama infinitésimos, de esta manera da claridad a la noción de infinitésimo que había manifestado Leibniz. Siguiendo con su análisis, Cauchy define: *Una cantidad variable se hace infinitamente grande cuando su valor numérico se incrementa indefinidamente de manera tal que converge al límite infinito* (α), es de aclarar que α no es una cantidad, sino un símbolo que significa algo indefinidamente grande. Con estos argumentos éste magnífico matemático define la continuidad como sigue: *La función $f(x)$ permanecerá continua con respecto a x entre los dos límites dados, si, entre estos límites, un incremento infinitamente pequeño de la variable produce siempre un incremento infinitamente pequeño de la función misma*. Así Cauchy aclara el concepto de infinitesimal y lo involucra en el estudio de los límites y la continuidad de funciones.

Georg Friedrich Bernhard Riemann, matemático alemán, nació en 1826 y murió en 1866, sus aportes al análisis, teoría de números y geometría diferencial y por supuesto al cálculo, lo inmortalizaron, todos sabemos de la famosa integral de Riemann. En el campo del cálculo dio a conocer la diferencia entre continuidad y diferenciabilidad, en un artículo escrito en 1854 llamado sobre la representatividad de una función mediante una serie trigonométrica. Riemann define la siguiente función: Denotemos con (x) la diferencia entre x y el número más cercano y sea $(x) = 0$ si está a la mitad entre dos enteros consecutivos, entonces:$-½ < (x) < ½$, ahora la función se define como: $f(x) = \frac{(x)}{1} + \frac{(2x)}{4} + \frac{(3x)}{9} + \cdots$ la serie converge para todos los valores de x; sin embargo, para $x = \varrho/2n$, donde ϱ es un entero primo con $2n$, $f(x)$ es discontinua y tiene un salto con valor de $\pi 2/8n2$, en todos los otros valores de $x, f(x)$ es continua. Considera que $f(x)$ es integrable y que no es diferenciable en donde $f(x)$ es discontinua.


Fuente: http://es.wikipedia.org/wiki/Bernhard_Riemann

Karl Weierstrass, matemático alemán, nació en 1815 y murió en 1897, considerado el padre del análisis moderno, ya que fue quien dio la definición moderna de continuidad, límite y derivada. Con lo anterior pudo demostrar teoremas de gran importancia en el mundo de las matemáticas como el "Teorema del Valor Medio" y el "Teorema de Bolzano – Weierstrass". Respecto a los aportes al concepto de función, primero atacó la frase "…una variable se acerca a un límite…", lo que involucra tiempo y movimiento, interpreta una variable simplemente como una letra que se utiliza para denotar cualquier valor de los elementos de un conjunto a los que se les puede asignar una letra, así se elimina la idea de movimiento. Define una variable continua x


Fuente: http://es.wikipedia.org/wiki/Karl_Weierstrass

como cualquier valor del conjunto de valores de la variable y δ cualquier número positivo, entonces hay otros valores de la variable en el intervalo $(x0 - \delta, x0 + \delta)$.

Para eliminar las ambigüedades que se presentaban en los conceptos de continuidad y límite dados por varios matemáticos de la época, Weierstrass aportó la definición que es aceptada en la actualidad para una función continua: $f(x)$ *es continua en* $x = x0$ *si dado cualquier número positivo* ε*,debe existir un valor*δ*tal que para todo* x *en el intervalo* $|\, x - x0 \,| < \delta, |\, f(x) - f(x0) \,| < \varepsilon,$ extiende su definición diciendo que una función $f(x)$es continua en un intervalo de valores x, si es continua en cada x del intervalo, para soportar esta definición, en 1874 presenta la llamada función de Weierstrass como sigue: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$ donde *a* es un entero impar y *b* una constante positiva menor que 1, tal que $ab > 1 + (3\pi/2)$. Dicha serie es uniformemente convergente y, por lo tanto, define una función continua. Esta definición es muy cercana a la definición moderna. Los aportes de este gran matemático son relevantes en la matemática actual, destacando que cuando fue docente de la universidad de Berlín tuvo como estudiantes entre otros a Cantor, Forbenius y Runge.

Fuente: http://es.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor

Con la aparición de la teoría de conjuntos, iniciada por **Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor**, matemático alemán, nacido en San Petersburgo en 1845 y murió en Halle en 1918, se da una gran evolución al concepto de función. Aparece el concepto de correspondencia que es aplicada a la definición de función.

En la obra de Cantor sobre teoría de conjuntos, se dice que un conjunto es una colección de objetos definidos y separados que pueden ser concebidos por la mente humana y sobre los que se puede decidir si un determinado objeto pertenece o no a dicho conjunto. Según Cantor un conjunto es infinito si existe una correspondencia biunívoca con una parte de sí mismo, considera que un conjunto es cerrado si contiene a todos sus puntos límite y es abierto si todos sus puntos son interiores. Definió la unión e intersección entre conjuntos; además, estableció como criterio básico la correspondencia uno a uno. Afirma que dos conjuntos que se pueden poner en correspondencia biunívoca, son equivalentes. Estos principios son muy importantes en la definición moderna de función. Para Cantor el conjunto de números era desde luego los más importantes y desde allí explica el concepto de equivalencia o potencia, (Cardinalidad) introduce el término *numerable*, para cualquier conjunto que se puede poner en correspondencia biunívoca con los enteros positivos. Cantor probó que el conjunto de números racionales es numerable (*Ver Morris Klane, el pensamiento matemático de la antigüedad hasta nuestros días, pág. 1313*)

Fue tanto el impacto dado en el trabajo realizado por Cantor, que Hilbert otro gran matemático, afirmó:"*Nadie podrá expulsarnos del paraíso que Cantor creó para nosotros*".

El estudio de función sigue evolucionando y desde el concepto de correspondencia, los matemáticos pasaron al de Relación, lo que motivó que a inicios del siglo XX aparecen nuevos conceptos matemáticos, como: Espacio métrico, espacio topológico, espacio de Hilbert y espacios de Banach, entre otros. La evolución abstracta que ha tenido la matemática, ha hecho que el concepto de función también lo sea. El desarrollo en los campos del álgebra abstracta y topología ha dado lugar al surgimiento de nuevas definiciones, es así como el **Grupo Bourbaki**, en 1939 dio una definición de función desde la teoría de conjuntos: *Una función es una correspondencia entre dos conjuntos*, muy similar a la dada por Dirichlet en 1837: "*Sea E y F dos conjuntos, que pueden o no ser distintos. Una relación entre un elemento variable x de E y un elemento variable y de F, se llama relación funcional en y, si para todo x en E, existe un único y en F el cual está en relación dada con x. Damos el nombre de función a la operación que, de esta forma, asocia cada elemento x en E con el elemento y de F que está en relación con x, se dice que la función está definida por la relación dada. Dos relaciones funcionales equivalentes determinan la misma función*".

2.Aspectos disciplinares y de modelamiento

2.1 Aspectos disciplinares

2.1.1 El concepto de función

En todo fenómeno que ocurre en la naturaleza, tales como el crecimiento de vegetales y animales, el crecimiento de microorganismos, el crecimiento demográfico, aspectos económicas, el movimiento, el cambio de presión, la desintegración de una sustancia radioactiva y muchos otros más, se pueden describir analíticamente por medio de una función, lo que se puede conseguir identificando la dinámica del fenómeno y sus características.

Con el fin de introducirnos en los aspectos disciplinares relacionados con el concepto de función, veamos algunas definiciones recientes.

Definición 1: Una relación de un conjunto A en un conjunto B es un subconjunto del producto cartesiano AxB.

Definición 2: Una función de un conjunto A en un conjunto B es una relación de A en B que asigna a cada elemento de A uno y solo un elemento de B. Al conjunto A se le llama el dominio de la función, al conjunto B el codominio y los elementos de B que están relacionados con algún elemento del conjunto A se le llama rango o imagen.

2.1.2 Algunas formas de describir una función

Una función puede ser presentada en forma gráfica, por medio de una fórmula, a través de una tabla entre otros. En el aprendizaje del concepto de función, es importante el paso de una representación a otra.

El matemático francés Agustín Louis Cauchy (1.789 – 1.857) dentro de los trabajos matemáticos, como precisión de los conceptos de función, límites y continuidad, propone una forma de esquematizar una función: $y = f(x)$. Las variables x e y toman valores en los números reales. En este caso, el dominio de la función f corresponde al conjunto de valores que puede tomar la variable x y la imagen de f son los valores que toma la variable y. Al respecto y solo para tenerlo en cuenta, la recta real es un "continuo" y el conjunto de los números reales es denso y no es enumerable, no es contable, hecho demostrado por George Cantor en 1891.

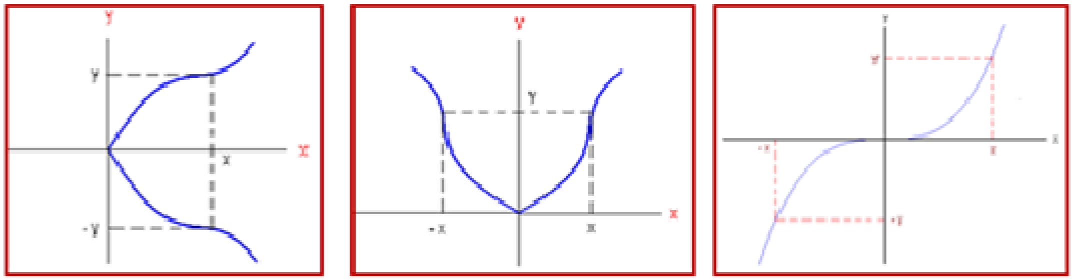
Para los casos que nos ocupan, trataremos con funciones que modelan hechos de tipo físico. Así que podríamos decir que las funciones de interés son en el fondo funciones reales. En lo que sigue las definiciones están en el contexto de las funciones reales que se describen de la siguiente manera $f: A \to R$, donde A es un subconjunto del conjunto de los números reales R; es de anotar que su gráfica se representa en un sistema de coordenadas cartesianas usualmente nombrando sus ejes como x e y.

Ahora bien, el estudio de las funciones polinómicas y trascendentes, entre las que destacamos, la cuadrática, la inversa, las logarítmicas y las trigonométricas, serán la clave para modelar los hechos de carácter físico de nuestro interés.

2.1.3 Algunas definiciones

Simetría: La simetría es el comportamiento de la curva respecto a los ejes coordenados. Una curva es simétrica respecto al eje y, si la parte derecha es la imagen especular de la parte izquierda, será simétrica respecto al eje x si la parte superior es la imagen especular de la parte inferior.

Figura 2-1: Simetría de una función



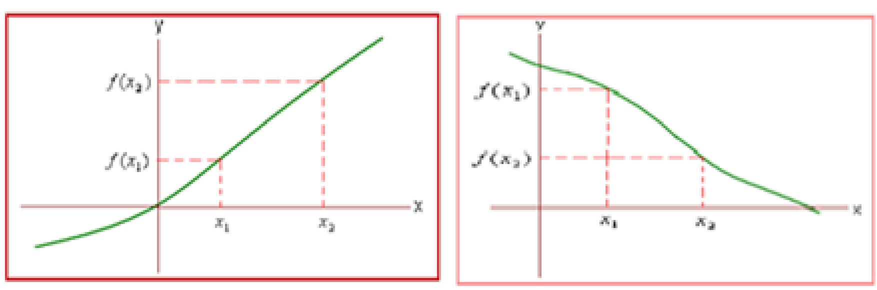
Simetría respecto al eje x Simetría respecto al eje y Simetría respecto al origen

La simetría de las funciones está relacionada con el concepto de función par e impar. Una *función par* es aquella en la que para todo $x$de su dominio $f(-x) = f(x)$, la gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje y. Una *función impar* es aquella en la que para todo $x$de su dominio $f(-x) = -f(x)$, la gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen del sistema de coordenadas.

Monotonía: Una función se considera monótona si es creciente o decreciente. Una *función creciente,* es intuitivamente una función donde a medida que aumenta la variable x, también aumenta la variable y. Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo I, se dice que f es creciente en I, si para todos $x_1, x_2 \in I$ tales que $x_1 < x_2$, se tiene que $f(x_1) < f(x_2)$. Una f*unción decreciente*, es aquella donde a medida que aumenta la variable x, la variable y disminuye. Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo I, se dice que f es decreciente en I, si para todos $x_1, x_2 \in I$tales que $x_1 < x_2$, se tiene que$f(x_1) > f(x_2)$.

Figura 2-2: Función creciente y Función decreciente

Función Creciente Función Decreciente



Función inyectiva: También llamada función uno a uno. Dada la función$y = f(x)$, se dice que f es inyectiva si dados dos elementos del dominio x_1 y x_2, tales que $x_1 \neq x_2$, se tiene que$f(x_1) \neq f(x_2)$.

Función sobreyectiva: Dada la función $y = f(x)$, se dice que f essobreyectiva si su codominio es igual a su rango. De otra manera, sea $f: A \to B$ una función, se dice que f es sobreyectiva si para todo el elemento y de B, existe un x en A tal que $f(x) = y$.

Función biyectiva: Una función $y = f(x)$ es biyectiva si, solo si, es inyectiva y sobreyectiva.

En lo que sigue, nos centraremos en las funciones reales denominadaspolinómicasy trascendentes.

2.2 Funciones polinómicas

DEFINICION: Una función polinómica de grado n es una función de la forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + ax + a_0$, donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ y a_0 son reales y

$$a_n \neq 0. n \in Z^+.$$

Veamos algunos casos particulares.

Función Lineal:

DEFINICION: Una función lineal es una función de la forma $f(x) = mx + b$, donde m y b son reales y $m \neq 0$.

El dominio y el rango de una función lineal son en ambos casos el conjunto de los números reales. La gráfica de una función lineal es una línea recta. Si la función es de la forma $f(x) = m$, con $m \neq 0$, f no es una función polinómica. Si la función es de la forma $f(x) = mx$con$m \neq 0, f$es una función impar, síf es de la forma $f(x) = mx + b$ con $m \neq 0$ y $b \neq 0$,entonces f no es par tampoco impar.

Función Cuadrática:

DEFINICION: Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son reales y $a \neq 0$. Se define como una función cuadrática.

La gráfica de una función cuadrática es una parábola, si a es positivo, la parábola abre hacia arriba, si a es negativo la parábola abre hacia abajo. El dominio de una función cuadrática es el conjunto de los números reales, en particular si $a > 0$ el rango es el intervalo $[f\left(-\frac{b}{2a}\right), \infty)$y si$a < 0$, el rango es el intervalo $(-\infty, f\left(-\frac{b}{2a}\right)]$.

Función Radical:

DEFINICION: Una función radical es de la forma $f(x) = \sqrt[n]{p(x)}$, donde $p(x)$ es un polinomio, $n \in Z^+$ y $n \geq 2$.

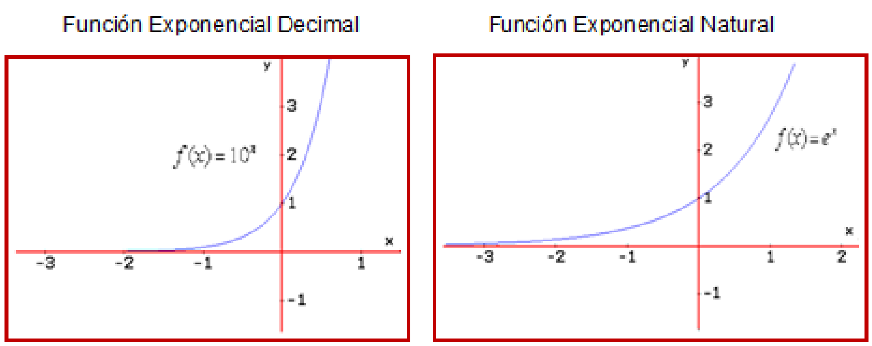
Para hallar el dominio de este tipo de funciones consideramos dos casos.Si$n$es *par*, el dominio de f son los números reales x tales que$p(x) \geq 0$. Si n*esimpar*, el dominio de$f$son todos los números reales.

2.3 Funciones trascendentes

Función exponencial: Son las funciones de la forma$f(x) = a^x$ para $a > 0$ y $a \neq 1$. Dada una función exponencial f, el dominio son el conjunto de los reales, la imagen es el conjunto de los reales positivos, f corta al eje y en el valor $y = 1$, ya que para $x = 0$, la imagen siempre es $y = 1$. La función f es monótona, en particular si $a > 0, f$es creciente, pero si $0 < a < 1$, $f$es decreciente.La gráfica de $f$no es simétrica con respecto al eje y ni con respecto al origen, por lo tanto f no es par ni impar; nótese que f tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

De manera especial se distinguen dos funciones exponenciales muy particulares, la función exponencial decimal, cuya base en 10, de allí su nombre y la función exponencial natural cuya base es el número de Euler e, éste último lo obtuvo Euler al desarrollar la expresión: $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \to 2{,}7182...$

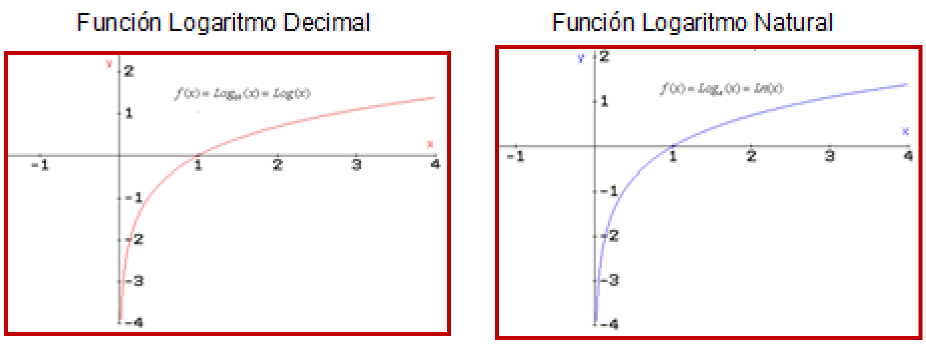
Figura 2-3: Función exponencial



Función logarítmica: Como veremos más adelante, la función logarítmica es inversa a la función exponencial. A propósito, John Neper (1.550 – 1.617) fue el primero que dio la definición de logaritmo, como la razón de dos magnitudes.

Una función logarítmica es de la forma $f(x) = Log_a(x)$ donde *a* es la base y *a*> 0 y *a* ≠ 1, el dominio son todos los reales positivos y la imagen son todos los reales. Una función logarítmica f es monótona, creciente para a > 1 y decreciente para 0 < a < 1,presenta una asíntota vertical en x = 0, la curva de la función corta al eje x en x = 1, pero no corta al eje y; además tiene una asíntota vertical en la recta x = 0.

Figura 2-4: Función logarítmica

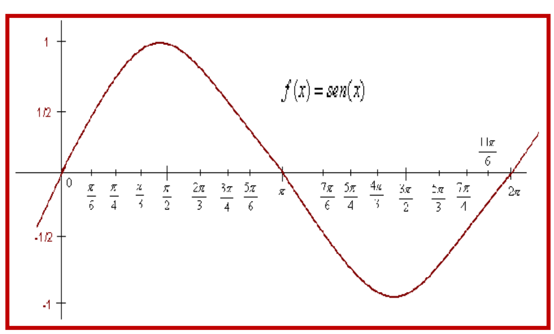


La importancia de las funciones exponencial y logarítmica está en sus aplicaciones, como en la modelación de carácter físico y químico; crecimiento y decrecimiento de oblaciones desintegración de materiales radioactivos, la determinación de la edad de fósiles y muchos otros.

Funciones trigonométricas: La trigonometría fue desarrollada hace más de 2.000 años, siendo los Griegos sus gestores y el Matemático y Astrónomo ***Hiparco*de Nicea**(190-120 a. d C.) uno de sus representantes. Sus inicios fueron motivados por la necesidad de predecir rutas y posiciones de cuerpos celestes, para mejorar la navegación, el cálculo de tiempos y posiciones de los planetas. La trigonometría se centra en el estudio de los Triángulos, la palabra se deriva del griego *Trigonom* que significa Triángulo y *metres* de medición.

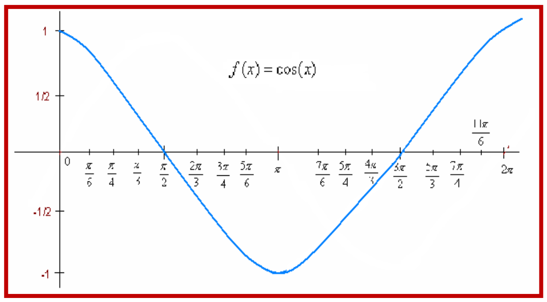
a) Función seno: Definida como: $f(x) = sen(x)$. Su dominio es el conjunto de los reales y la imagen el intervalo $[-1, 1]$. La función seno es impar, esto es $sen(-x) = -sen(x)$, luego es simétrica con respecto al origen de coordenadas, no es monótona y su periodo es 2π, ya que se verifica $sen(x) = sen(x + 2\pi)$.

Figura 2-5: La función sen(x)



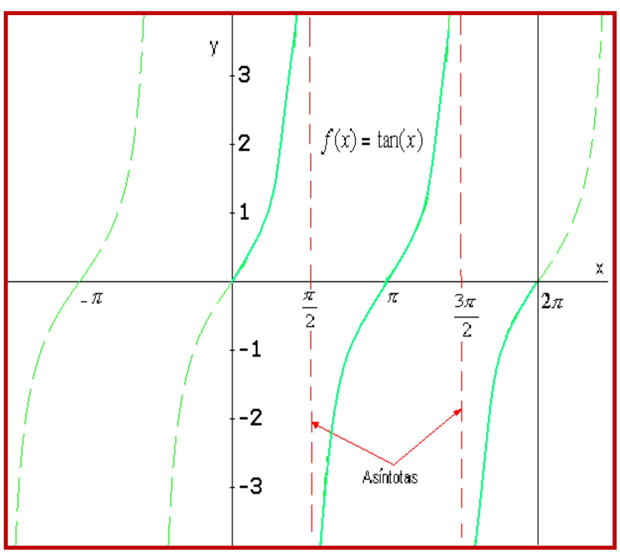
b) Función coseno: Definida como:$f(x) = cos\,(x)$El dominio es el conjunto de los reales y la imagen el intervalo $[-1, 1]$. Para la función coseno se cumple que$cos(-x) = cos(x)$ luego es una función par, por consiguiente su gráfica es simétrica respecto al eje $y$de coordenadas cartesianas, no es monótona, ya que presenta crecimiento y decrecimiento a través de su dominio, su periodo es2π, ya que cumple $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$.

Figuras 2-6: La función cos(x)



c) Función tangente: Definida como: f(x) = tan (x). Su dominio es el conjunto $\left\{x \in R/x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \; donde\; k\; es\; un\; entero\right\}$y la imagen son todos los reales. Puesto que $tan(-x) = -tan(x)$**,** indica que es una función impar, por consiguiente su gráfica es simétrica respecto al origen de coordenadas. Dado que $\tan(x) = \tan(x + \pi)$, esta función es periódica y su periodo esπ. Si la función se restringe a cada uno de los intervalos en donde es continua, la función es creciente. Las asíntotas verticales de f son las rectas de la forma $x = (2k + 1)\pi/2$.

Figura 2-7: La función tan(x)



d) Función cotangente: Definida como: $f(x) = cot\ (x)$. Su dominio es el conjunto $\{x \in R/x \neq\ k, donde\ k\ es\ un\ entero\}$. La imagen son todos los reales. Puesto que $cot(-x) = -cot(x), f$ es función impar, por consiguiente su gráfica es simétrica respecto al origen. Debido a que $\cot(x) = \cot(x+\pi)$ entonces dicha función es periódica y su periodo esπ. Si la función se restringe a cada uno de los intervalos en donde es continua, la función es decreciente.Las asíntotas verticales de f son las rectas de la forma $x = k\pi$, donde k es un entero.

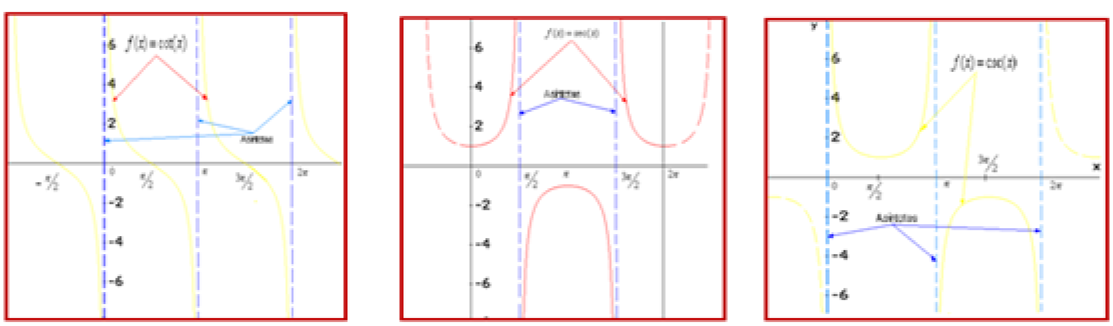
e) Función secante: Definida como $f(x) = sec\ (x)$. Su dominio es el conjunto$\left\{x \in R/x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \right\}$, donde k es un entero. La imagen corresponde $(-\alpha, -1]\ U\ [1, \alpha)$. La secante es una función par, así que es simétrica respecto al eje y, su periodo es 2π, las asíntotas verticales son las rectas de la forma $x = (2k+1)\pi/2$ donde k es un entero.

f) Función cosecante: Definida como: $f(x) = csc\ (x)$ Su dominio es el conjunto

$\{x \in R/x\ \neq\ k\pi\}$donde$k$ es un entero. La imagen corresponde a $(-\alpha, -1]\ U\ [1, \alpha), f$ es una función impar; así que su gráfica es simétrica con respecto al origen, su periodo es 2π y las asíntotas verticales son las rectas de la forma $x = k\pi$ donde k es un entero.

Figura 2-8: Otras funciones trigonométrica

Función Cotangente *Función Secante* *Función Cosecante*



Así como las funciones exponenciales y logarítmicas tienen diversas utilidades, las funciones trigonométricas son muy utilizadas en fenómenos físicos como el movimiento armónico simple, en el estudio de las ondas, en ingeniería para determinar la altura de un edificio conociendo la longitud de la base y el ángulo de proyección, en aviación para determinar la distancia de un avión conociendo el ángulo y la trayectoria, en astronomía las funciones trigonométricas son esenciales.

2.4 Algebra de funciones

a) Sean f una función y k un número real, la función kf se define por $(kf)(x) = kf(x)$ y tiene por dominio al dominio de f.

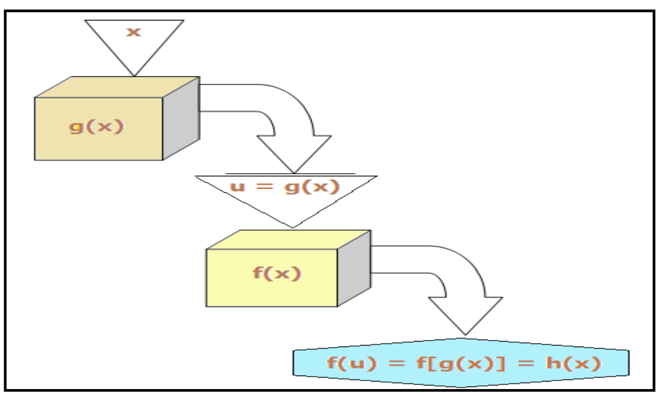
b) SUMA: Sean f y g dos funciones reales. La función suma de f y g, $f + g$ tiene como dominio a la intersección de los dominios de f y g se define como:
$(f + g)(x) = f(x)$+ $g(x)$. La suma de funciones es conmutativa y asociativa.

c) PRODUCTO: Sean f y g dos funciones reales. La función producto de f y g, que notamos $f.g$, tiene como dominio a la intersección de los dominios de f y g y se define como $(f.g)(x) = f(x).g(x)$.El producto de funciones es conmutativo y asociativo.

d) COCIENTE: Sean f y g dos funciones reales. La función cociente de f y g que notamos f/g tiene como dominio al conjunto $\{x \in Dom(g) \cap Dom\ (f)\ /\ Dom(g) \neq 0\}$ y se define como $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$.

e) COMPOSICIÓN DE FUNCIONES: Sean f y g dos funciones reales. La composición de$f$ y g que notamos fog tiene como dominio al conjunto$\{x \in Dom(g)/\ \ g(x) \in Dom(f)\}$ y se define como $(f\ o\ g)\ (x) = f\ (g(x))$.

Figura 2-9: Esquema de la composición de funciones



En general la composición de funciones no es conmutativa; es decir, $f\ o\ g\ \neq\ g\ o\ f$.

2.5 La modelación matemática

Los modelos matemáticos son representaciones por medio de ecuaciones matemáticas que describen de manera ideal el fenómeno en estudio, éstos utilizan letras, números y operaciones. Por lo general las letras simbolizan las variables, los números representan las constantes y las operaciones indican las diversas interacciones que se presentan entre las variables del fenómeno.

Una vez identificado el fenómeno, las variables que participan y las limitaciones, en seguida se realiza el experimento que describe el comportamiento del primero, para que con los datos obtenidos, se realice el proceso matemático respectivo, donde se busca la relación de las variables analizadas para definir el modelo matemático que mejor describe el fenómeno en estudio.

2.5.1 Procedimiento para construir un modelo matemático

a) El Problema: Desde la antigüedad el hombre ha identificado problemas, los babilonios se preocuparon por la Astronomía cuyo papel fue el interés por las predicciones, ya que la asociaron con la astrología. Los pitagóricos buscaron determinar leyes físicas simples del sonido, buscando relaciones cuantitativas de dependencia entre variables físicas, tales como las longitudes de las cuerdas y los tonos de las notas sonoras. En la edad media las escuelas de Oxford y la francesa, se preocuparon por los problemas que presentaban cambio; es decir, el estudio del cambio. Newton en el siglo XVII se inquietó por interpretar el movimiento, fenómeno que presenta cambio, en concordancia con lo que se adelantó en la edad media. Todas estas situaciones muestran que para desarrollar un modelo matemático, lo primero es identificar el problema.

b) Las variables del fenómeno: En la antigüedad el concepto de variable no existía, se hablaba de relaciones funcionales, cuando se daban cuenta que dos entes (cualidad) se relacionaban. En la edad media, ya no se preocuparon por saber cómo ocurre le fenómeno sino por qué ocurre, allí comienza la discriminación de las cualidades y aparece el concepto de cantidad variable, como la intensidad de dicha cualidad. Con los trabajos de Descartes, aparece el concepto de dependencia entre cantidades variables. Con el desarrollo del álgebra y el surgimiento del cálculo infinitesimal, el concepto de variable es fundamental.

c) Limitaciones y restricciones: Cuando se analiza un fenómeno, se debe verificar los alcances, por ejemplo en un fenómeno de producción de un artículo, la cantidad a producir (variable independiente) tiene un límite, lo cual se debe tener en cuenta cuando se plantee el modelo. Las restricciones se dan en el uso del tipo de número en el modelo, por ejemplo si el fenómeno es analizar la cantidad de personas que suben a un TransMilenio, la variable está restringida a los números enteros positivos, mientras si el fenómeno es el costo de un servicio en Taxi, la variable se restringe a los números racionales.

d) Los datos del fenómeno: Uno de los pasos más relevantes es la toma de los datos, ya que si los datos no son confiables, se puede llegar a un modelo erróneo, aunque por lo general se presentan errores en la toma de los mismos, la idea es evitar tomar datos erróneos y buscar la forma de que los datos obtenidos sean confiables.

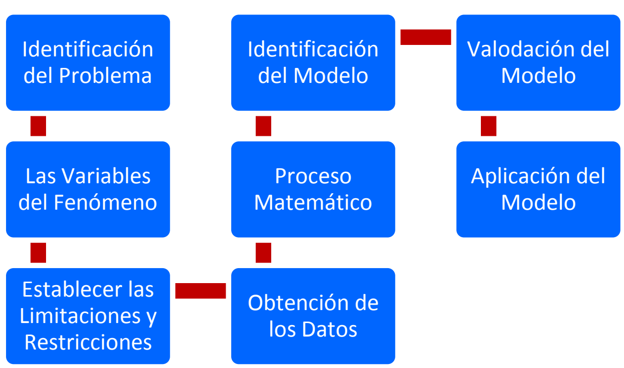
e) El proceso matemático: Con los datos obtenidos y validados, se busca la forma matemática que mejor relacionen los mismos. Para esto se debe tener un gran conocimiento de los principios matemáticos, como modelos preestablecidos, principios, leyes y operaciones entre otros. La regresión es una de las técnicas matemáticas más utilizadas para modelar fenómenos.

f) Formulación del modelo matemático: El resultado del proceso es un modelo matemático, el cual debe describir teóricamente el comportamiento del fenómeno. Por lo general se expresa como una ecuación, ya sea polinómica, exponencial, logarítmica, trigonométrica, hiperbólica, otras.

i) Validación del modelo: Como se dijo anteriormente, en la adquisición de los datos se presentan errores de medición, entonces la validación busca identificar el error del modelo, dándole un nivel de certeza apropiado a los resultados obtenidos, buscando que los parámetros, las variables y las relaciones funcionales, los contengan completamente. Una forma adecuada de validar es comparando los datos obtenidos con los datos de la predicción, si el error es muy bajo se dice que el modelo es bueno.

j) Aplicación del modelo: Una vez se haya validado y verificado su pertinencia, el modelo queda listo para trabajarlo, lo cual se hace tomando un valor de la variable o las variables que explican el fenómeno y observar cómo responde el fenómeno.

Figura 2-10: Construcción de un modelo matemático



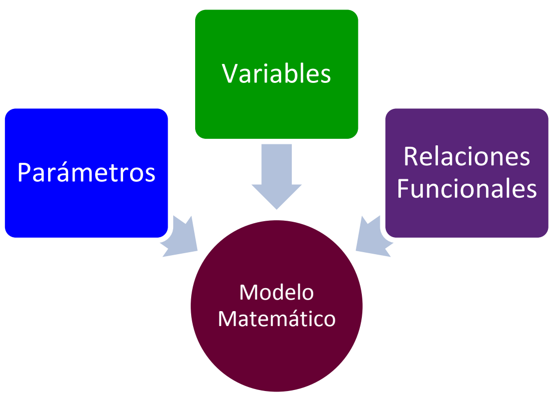
2.5.2 Elementos de un modelo matemático

a) ***Los parámetros***: Son los objetos que representan las entidades o atribuciones del fenómeno, estos son los valores constantes. Por lo general se simbolizan con letras tales como a, b, c,…

b) ***Las variables***: Son los objetos que representan las entidades o atributos que cambia con el tiempo, por lo general se simbolizan con letras como x, y, z,…

c) ***Relaciones funcionales***: Son los procesos físicos observados o las relaciones entre los símbolos del modelo, quienes describen el comportamiento cambiante de las variables y la forma en que afectan los parámetros.

Figura 2-11: Elementos de un modelo matemático



2.5.3 Clasificación de los modelos matemáticos

Para clasificar los modelos matemáticos existen diversos criterios. A continuación se describen algunos de ellos.

Según información de entrada: Se basa en el origen de la información utilizada para construir el modelo. Entre estos se tienen el modelo heurístico y el modelo empírico.

Modelo heurístico, proviene del griego *euriskein* que significa hallar o inventar. La heurística es la ciencia que se encarga del descubrimiento y la invención, para poder clarificar la naturaleza. Así los modelos heurísticos se basan en las explicaciones sobre las causas o mecanismos naturales que originan el fenómeno de interés. La cualidad heurística es muy común en los visionarios. Un ejemplo que se podría resaltar fue los inventos y diseños de Leonardo da Vinci, ya que diseñó un helicóptero sin que en ese tiempo se conociera.

Modelo empírico, proviene del griego *empeirikos* que significa experiencia, son modelos que se basan en las observaciones directas o de resultados experimentales de fenómenos físicos, los cuales son regidos por leyes físicas. Cuando no se conoce el fenómeno en su integridad, una buena cantidad de datos compensa esta dificultad y, permite obtener un buen modelo.

Según tipo de representación: Esta clasificación está relacionada con predicciones cualitativas o cuantitativas de aspectos propios del sistema que gobierna el fenómeno.Entre estos se tienen el modelo cualitativo y el modelo cuantitativo.

*Modelo cualitativo o conceptual,*es el que utiliza gráficos, figuras o descripciones causales, para predecir la dirección que puede tomar las variables que se están midiendo, por lo general se habla de crecimiento o decrecimiento, sin tener presente la magnitud en sus aspectos específicos. Ese tipo de modelo es muy utilizado en las ciencias sociales, ciencias de la tierra y otras.

Modelo cuantitativo o numérico, hace referencia al uso de los números para esquematizar aspectos propios del fenómeno estudiado, por lo general utiliza fórmulas, algoritmos matemáticos que relacionan los valores numéricos obtenidos en la medición del fenómeno. Este tipo de modelo es muy utilizado en las ciencias naturales, ciencias económicas y ciencias puras.

Según el número de variables: Desde el punto de vista de la cantidad de variables se distinguen dos tipos de modelos.

Modelo univariado, se caracterizan porque el fenómeno se analiza sólo desde la perspectiva de una variable, por lo general son los primeros que se estudian a nivel de situaciones de interés.

Modelo multivariado, son los que se analizan desde la perspectiva de más de una variable. La mayoría de fenómenos naturales son de este tipo. El cálculo Multivariado y el cálculo vectorial son espacios de la matemática que nos permiten estudiar éste tipo de modelos.

Según el valor de la variable independiente: De acuerdo al valor que puede tomar la variable independiente se tienen modelos discretos y modelos continuos.

*Modelos discretos,*la variable independiente (explicativa) sólo puede tomar valores enteros, también se le llama modelos enteros. Por ejemplo modelar el número de llamadas que recibe un Call Center, el número de personas que visitan un banco a en un día dado, el número de automóviles producidos por mesen una fábrica y muchos otros.

*Modelos continuos,*la variable independiente (explicativa) puede tomar valores dentro de un intervalo; es decir, en el conjunto de los reales. Casos como modelar el comportamiento del dólar durante un mes, modelar el producto interno bruto durante un semestre y otros.

Es de anotar que en la propuesta didáctica se trabajará con modelos empíricos, univariados y continuos.

2.5.4 Características de los modelos matemáticos

Para que un modelo sea aceptado sin ningún reparo, es pertinente que cumpla algunas características [2].

Parsimonia, es deseable la simplicidad del modelo, ya que este no es mejor si tiene muchos parámetros y/o variables.

***Modestia*, ** se debe buscar el alcance de objetivos asequibles, los modelos al igual que los mapas, deben ser diseñados de tal manera que resalten el factor de interés para el analista.

***Exactitud*,** el modelo debe permitir la reproducción de la mejor manera y en la medida de lo posible del funcionamiento del fenómeno objeto de estudio, generando valores y un estado lo más cercano a la realidad de éste último.

***Verificabilidad*,** el modelo debe permitir comparar los datos obtenidos, con los datos de la realidad, determinando así el grado de exactitud del mismo. Esto está relacionado con la validez a que se hizo referencia en los pasos para la construcción del modelo.

3. Aspectos pedagógico - didácticos

En los enfoques actuales acerca del aprendizaje, se ha tenido en cuenta que el estudiante debe ser el protagonista, buscando que el desarrollo del conocimiento sea muy dinámico, siendo la experimentación un muy buen camino, ya que el estudiante participa de manera activa en su formación, aprende mejor y tendrá mejores enfoques para aprender.

En general en la enseñanza tradicional el estudiante recibe los conocimientos por medio de la escucha, por lo general se asume una actitud pasiva, sólo de recepción y por lo general no se deja espacio suficiente para la reflexión y análisis.

Figura 3-1: Modelo Tradicional

Los nuevos modelos se enfocan hacia el *aprender haciendo*, el estudiante aplica la mayor parte de los sentidos al estudio de un fenómeno, allí se concentra toda la atención de manera activa, dinámica y participativa. Se deja el espacio para la lectura, reflexión y el análisis, lo que permite acercarse más al conocimiento. Si bien es cierto que los libros y las instrucciones son requeridos, es muy pertinente que el estudiante se enfrente a situaciones reales, que le permita acercarse al conocimiento de una manera más dinámica y precisa.

Entre más participación directa haya de los estudiantes, el aprendizaje será más efectivo, esto busca que los sistemas didácticos se centren en los estudiantes (usuarios) estimulando así el *aprendizaje activo*. Mientras más independientes actúen los estudiantes en los entornos modernos de aprendizaje, mayores necesidades y destrezas se aprenden para navegar en ellos, lo que enriquece su acción didáctica y despierta su deseo de comprender.

…*Aprendizaje activo significa, básicamente, que los estudiantes están involucrados en algún tipo de actividad guiada en clase, a fin de que estén haciendo algo en el aula, además de sentarse y escuchar al instructor dar una conferencia, o viendo los problemas de trabajo en la pizarra* [5]

…el aprendizaje activo se asocia con la llamada "Participación Interactiva", …los métodos de participación interactiva son diseñados en parte para promover la comprensión conceptual a través de la participación interactiva de los estudiantes en actividades mentales (continuamente) y de manos a la obra, produciendo información inmediata a través de la discusión entre los estudiantes y con su instructor… El autor examinó datos de más de 6.000 estudiantes en clases de física en 62 cursos de introducción a la física y encontró que los estudiantes que los estudiantes que utilizan técnicas de aprendizaje activo y la participación interactiva lograron un aumento promedio del 48% en una prueba estándar de la física de conocimiento conceptual [7]

El aprendizaje activo es aquel aprendizaje basado en el alumno, es decir, es un aprendizaje que sólo puede adquirirse a través de la implicación, motivación, atención y trabajo constante del alumno[11]

Figura 3-2: Elementos del aprendizaje activo

En nuestro caso, el aprendizaje activo se ve reflejado en la propuesta tanto en los experimentos de carácter físico como en los análisis que realizan los estudiantes.

3.1Características del aprendizaje activo

Como todo camino de aprendizaje, el aprendizaje activo tiene ciertas características, que lo hace muy atractivo.

Una aventura, una vez abordado el camino, no se sabe en donde se terminará, se cuenta con muchas sorpresas. El aprendizaje pasivo es predecible, el profesor tiene el guion o libreto que se conoce y cumple. El aprendizaje activo, nos puede llevar a descubrimientos no previstos, ya que durante la aventura se pueden experimentar momentos de aprendizaje nuevos y sorprendentes.

Divertido y cautivante, los estudiantes de ahora son más exigentes para su aprendizaje, cuando la actividad sólo es un discurso; se hace aburridora, perdiendo interés por atender y por ende aprender. Con el aprendizaje activo, el estudiante se involucra en la exploración del conocimiento, siendo éste quien buscará lo que más le motiva del tema, para profundizar de él, para abordarlo con más gusto, divertirse con él y saborearlo, lo que garantiza un mejor aprendizaje.

Participación de todos, en este tipo de didáctica, todos participan, haciendo una analogía con un partido de futbol, todos son alineados para que hagan parte del equipo y participen en el partido, sabiendo que si alguno no se involucra, hay riesgo de perder el partido, por lo cual si todos juegan bien, todos ganan.

El Protagonista es el estudiante, ya que ellos van descubriendo por medio de las actividades realizadas y no dependen del maestro para hacerlo, éste sólo es un orientador de dicho descubrimiento, así el aprendizaje se mueve al ritmo de los estudiantes, siendo ellos los que dan la marcha y los alcances.

Un Proceso Orientado, como en todo proceso de aprendizaje, se requiere algún tipo de orientación, para que el experimento se pueda desarrollar de manera adecuada, una vez reconocidos y entendidos los lineamientos básicos, el estudiante puede seguir adelante en el proceso, sin que los lineamientos se conviertan en un recetario cerrado, que no conduce a nada.

Enfocado a la participación, sin la participación, el aprendizaje sólo será una aventura pasajera de captación de conceptos aislados y memorísticos, cuya probabilidad de asimilación es muy baja, cuando se vive y se involucra en el conocimiento, se puede conseguir mejor información y conocimientos más claros, que se pueden anclar en la memoria a largo plazo, así se garantiza el verdadero aprendizaje.

Relaciona, como el aprendizaje activo involucra a todos y todas las experiencias irradian el trabajo de todos, entonces hay una interacción entre todos, lo que ocurre en medio del compañerismo. La necesidad de relación, motiva a los estudiantes a aprender unos de otros.

3.2Elementos del aprendizaje activo

a) Los Participantes, los estudiantes son los protagonistas, participan activamente en grupos de trabajo, el cual es de tipo colaborativo. El Docente: Es el orientador y dinamizador del proceso, también aprende en el proceso. Los Asistentes: cuando el caso lo amerita, se tienen asistentes que apoyan el trabajo del docente.

b) La Metodología, para aplicar el aprendizaje activo, se tienen una serie de pasos secuencialmente ordenados que dinamizan el proceso, éstos se pueden observar en la figura siguiente.

Figura 3-3: Proceso del aprendizaje activo

c) El Fenómeno, se considera a cualquier ocurrencia de la naturaleza, ya sea que suceda por la naturaleza es si, o motivada por el hombre. Una marea, la lluvia, el caudal de un rio, sucede por la naturaleza en sí. La caída de un niño en un rodadero, el lanzamiento de un disco, el recorrido de un auto en cierto tiempo, son motivados por el hombre. Para el caso de este trabajo se han seleccionado fenómenos muy comunes en nuestro medio: El plano inclinado, la caída libre de un líquido por un orificio de diámetro conocido.

d) Preguntas de Motivación, con el fin de inquietar al estudiante, se planear algunas preguntas sobre el tema para que el estudiante pueda identificar qué conoce y qué no conoce del mismo, lo cual inquieta e induce a indagar acerca el tema en estudio.

e) Predicciones Individuales: Son las primeras especulaciones que hace el estudiante sobre los principios y las características del tema que se estudia, esto le permite indagar acerca de sus conocimientos previos.

f) Predicciones Grupales: Como el trabajo se realiza en grupo colaborativo, a partir de las predicciones individuales, el siguiente paso es hacer un acuerdo grupal sobre lo que se considera propio del tema.

g) Síntesis de las Predicciones: Consiste en hacer un resumen escrito acerca de las predicciones, para poderlas comparar con los resultados del proceso experimental.

h) Práctica Experimental: Es la realización del experimento que conlleva a la verificación de los principios e identificación de las propiedades del fenómeno en estudio.

i) Resultados y Procesos Matemáticos: Con la realización del experimento, se obtienen datos que requieren su respectivo análisis y tratamiento matemático. Existen diversos procesos matemáticos que se pueden realizar, para el caso del presente trabajo, son importantes la Transformación Logarítmica, la Regresión y la Correlación.

j) Análisis de los Resultados: Con el tratamiento matemático realizado, tales como la regresión, transformación y demás, se plantea el modelo más adecuado, de acuerdo a ciertos criterios preestablecidos, tales como R^2, conocido como el índice de determinación.

k) Modelo Matemático: El modelo obtenido, se debe validar por medio de procesos estadísticos, tales como el análisis del error e intervalos de confianza, para determinar su validez y veracidad.

l) Conclusiones y Recomendaciones: Con el trabajo realizado, se presentan las conclusiones del estudio, sobre sus alcances, su aplicabilidad y otros. También las recomendaciones que se puedan proponer y sus limitaciones.

4. Propuesta Didáctica

Construcción de funciones a través de fenómenos físicos aplicando el aprendizaje activo

4.1 Introducción

El estudio de las funciones considera el análisis de sus principales características tales como: El dominio, rango o imagen, la gráfica, la monotonía, la simetría. Además las operaciones algebraicas con funciones. Si bien es cierto que es necesario potenciar a los estudiantes en estos aspectos, es pertinente también que el estudiante le vea significancia a algunas de las funciones con que habitualmente se trabaja, por ejemplo las funciones polinómicas, las funciones inversas, las funciones potenciales y las funciones trigonométricas. En particular la propuesta se centra en dar significado a dichas funciones a partir de observaciones y análisis de fenómenos físicos. Esto permite al estudiante entre otros, construir los modelos y determinar entre otros los parámetros que intervienen en ellos, además de identificar claramente la variable dependiente e independiente y su significado en el contexto.

Es evidente que para la realización de las actividades, el estudiante tiene los conocimientos previos sobre el tema en estudio, por ejemplo la identificación de la gráfica de una función, el modelo de las funciones más conocidas. La propuesta está dirigida a estudiantes de primeros semestres universitarios.

En el trabajo, también se deja ver las limitaciones que se pueden presentar en el aula de clase para determinar con precisión un modelo matemático de un fenómeno observado, para lo cual se puede aprovechar las TIC, específicamente los Software, como herramienta de procesamiento y verificación de modelos matemáticos.

4.2 Objetivo General

Construir modelos matemáticos que describan fenómenos físicos, a partir de datos experimentales.

4.3 Objetivos Específicos

a) Obtener la función cuadrática y la función radical como modelos matemáticosa partir del análisis teórico de un fenómeno conocido como lo es la caída libre de un cuerpo.

b) Construir modelos matemáticos afines con funciones que describen una relación inversamente proporcional y logarítmica, de experimentos relacionados con la caída libre de un líquido.

c) Construir modelos matemáticos afines con funciones cuadráticas y trigonométricas, de experimentos relacionados con movimientos en el plano inclinado.

d) Aplicar el aprendizaje activo como estrategia para obtener el modelo matemático de interés

4.4 Valoración Inicial

El trabajo está diseñado para estudiantes de primero y segundo semestre universitario, para programas de Ingeniería y Administración de Empresas. La población definida fue de 150 estudiantes, de los cuales el 34% fueron mujeres y el 66% fueron hombres. Se plantearon algunas preguntas de motivación del tema en estudio, en las cuales se observó que aproximadamente el 40% de los estudiantes tenían conocimientos básicos, pero manifestaron que en algunos casos respondían con duda sobre el concepto de función, de dominio, de rango y de la diferenciación entre variable dependiente e independiente. Los resultados confirmaron la necesidad de buscar una forma didáctica que permita comprender de una manera más dinámica y efectiva el concepto de función.

Para hacer el estudio experimental, se definió una muestra piloto de 40 estudiantes, a quienes se les realizó una valoración inicial individual.

1. En un fenómeno donde una esfera de desliza sobre un plano inclinado, la relación tiempo – distancia recorrida es de tipo: Lineal, cuadrática, inversa, exponencial, logarítmica o trigonométrica?

2. Cuando cae libremente un líquido como el agua por un orificio, la relación tiempo – diámetro es de tipo lineal, cuadrático, inversa, exponencial o trigonométrica?

Con relación a la pregunta No 1, solamente el 18% de los estudiantes respondió correctamente y con relación a la pregunta No 2, solamente el 12% de los estudiantes respondió correctamente.

De la misma manera, se establecieron 8 grupos de 5 estudiantes cada uno, para hacer una valoración inicial grupal,analizaron las mismas preguntas que respondieron de manera individual. Con relación a la pregunta No 1, solamente el 20% de los grupos respondieroncorrectamente y con relación a la pregunta No 2, solamente el 15% de los grupos respondieron correctamente.

Los resultados obtenidos en esta prueba, se puede concluir que existen deficiencias notables respecto al concepto de función, lo cual motiva a plantear el estudio propuesto en el presente trabajo investigativo.

4.5 Principios estadísticos requeridos

Para el análisis de los datos obtenidos en los experimentos, es necesario conocer algunos principios sobre los conceptos de Regresión y Determinación.

Regresión: La palabra regresión fue utilizada por primera vez por Francis Galton, (1.822 – 1.911) en sus estudios de biología sobre la herencia, donde él noto que las características promedio de la siguiente generación de un grupo particular, tendía a moverse en la dirección de las características promedio de la población, más que a la generación previa de dicho grupo.

La regresión es considerada una asociación cuantitativa entre las variables que participan en el fenómeno. Existen diversas clases de regresión, las cuales son visibles por medio de un modelo matemático, el cual muestra la relación entre las variables.

Según el modelo matemático se conocen diversas clases de regresión: regresión lineal, regresión cuadrática, regresión logarítmica, sin embargo existen otros tipos de regresión, que describen fenómenos particulares. En todo tipo de regresión se definen dos variables, de las cuales se hacen una breve descripción:

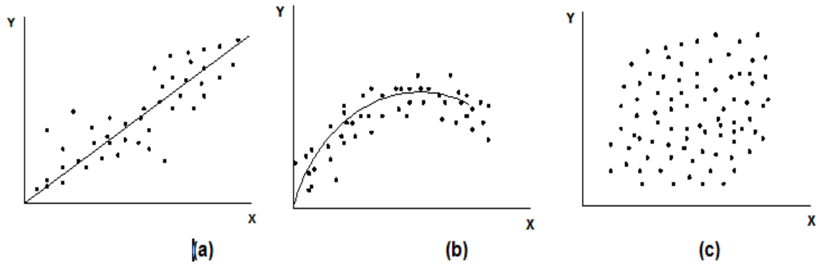
Variable de Respuesta: Es la variable Y; es decir, la variable dependiente y es que se observa bajo condiciones experimentales, pero no se puede controlar. En todo modelo, se asume que la variable de respuesta Y tiene distribución normal; es decir, que tienen una media μ y una varianza definida.

Variable Predictora: Corresponde a la variable independiente$X$, en la variable cuyos valores se definen de antemano, por lo que pueden ser controlables en el fenómeno o experimento de interés.

El comportamiento de las variables se pueden observar de manera cualitativa por medio de una gráfica en el plano cartesiano, de tal manera que se dibujar tantas parejas ordenadas como observaciones se hayan tomado del fenómeno. Al conjunto de puntos o nube de puntos se le denomina diagrama de dispersión, dado que los puntos se ubican de forma dispersa en el plano cartesiano, por observación se puede indicar una tendencia de agrupación de los puntos, que puede ser lineal (hacia arriba o hacia abajo), exponencial, logarítmica, poligonal, otros.

Figura 4-1: Algunos tipos de dispersión

(a) lineal; (b) curvilínea; (c) sin relación



Fuente: Estadistica y Probabilidad, Jorge Rondon, 2012

Coeficiente de determinación: El coeficiente de determinación es una medida de ajuste del modelo de regresión, el coeficiente de determinación mide el grado de variación que tiene la variable de respuesta, (Y) que es explicado por el modelo, específicamente por la variación de la variable explicativa. La forma cuantitativa de medir el ajuste del modelo es por medio del coeficiente de determinación, el cual toma valores entre 0 y 1, inclusive. Cuando el coeficiente es cercano a uno, indica que el modelo es explicado muy bien por la línea de regresión. Cuando el coeficiente es cercano a cero, entonces la variación de la variable de respuesta no es causada por la variable explicativa, lo que indica que el modelo no es bueno.

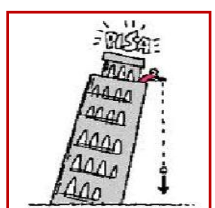
4.6 Talleres experimentales

A continuación se presenta el procedimiento para diversos experimentos que permiten construir varias funciones de las más conocidas, para que el estudiante los realice y participe en dicho proceso de manera dinámica y activa. Aquí los estudiantes realizar los experimentos,en los cuales deben tomar los datos, hacer el análisis, obtener el modelo y dar las conclusiones correspondientes.

4.6.1 Taller N° 1: La función cuadrática como modelo de la caída libre de un objeto

Objetivo: Identificar la función cuadrática por medio de los análisis de caída libre de los cuerpos.

Estudio de un fenómeno teórico: Uno de los fenómenos más comunes es la caída libre de los objetos, en los cuales la aceleración es constante y corresponde a la gravedad. Por el principio de



http://www.google.com.co/#sclient=psy-caida libre conservación de la energía, la cual afirma que en un sistema físico aislado, la energía potencial es equivalente a la energía cinética; es decir, $Ep = Ec$a partir de los fundamentos teóricos: $Ep = mgh \ y \ Ec = ½ mv^2$ siendo *m*la masa, *h* la altura, *v* la velocidad y *g* la gravedad. Entonces $mgh = \frac{1}{2}mv^2$, de donde

$gh = \frac{1}{2}v^2$ Por otro lado, por las ecuaciones básicas de movimiento vertical, se tiene:

$v = gt$. Siendo *v* la velocidad y *t* el tiempo.

A partir de la información anterior:

a) Halle la relación velocidad – altura y grafique dicha relación.

b) Identifique la relación altura – tiempo y grafique dicha relación.

c) Determine qué tipo de relación se forman en los casos a y b, esto es, es lineal?, cuadrática? Logarítmica?, radical?, otra?.

4.6.2 Taller N° 2: La función cuadrática como modelo del movimiento en el plano inclinado

Objetivo: Identificar la función cuadrática por medio de los análisis de movimiento en el plano inclinado.

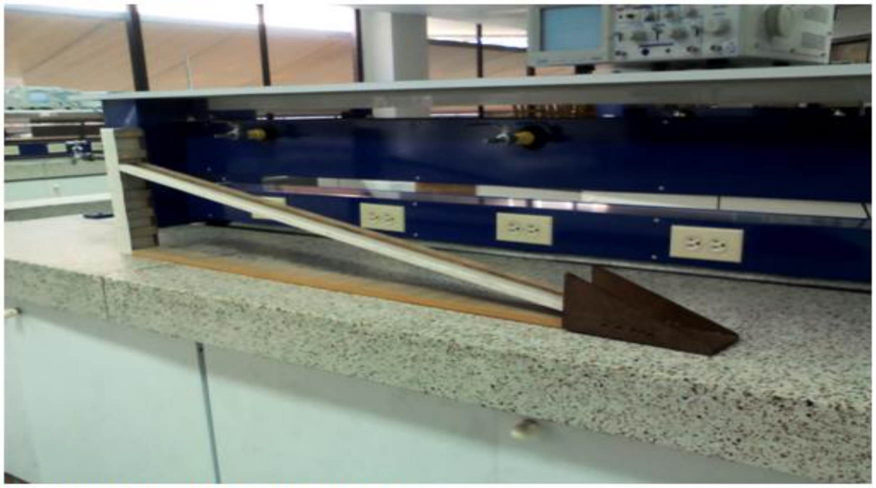
Marco Teórico: En un movimiento sobre el plano inclinado, la aceleración lineal es constante y paralela a la inclinación del plano. La relación tiempo – distancia es cuadrática. El experimento diseñado busca demostrar dicha relación.

Variables de estudio*:* Para la función de interés, las variables de estudio son: Tiempo de desplazamiento de la esfera y longitud del plano inclinado.

Material didáctico

- Un plano inclinado en madera, con superficie pulida.
- Esferas en metal con superficie fina, de diversas masas: 18,795; 35,624 y 110,44 gramos.
- Un cronómetro digital.

Figura 4-2: Plano Inclinado



Fuente: laboratorio Física UNAD

Procedimiento

1. Fije el ángulo en el plano inclinado de $8{,}5^0$
2. Utilice una esfera de masa conocida, para este caso una de 18,795 gramos.
3. Defina las longitudes de medición: 20, 40, 60, 80 y 100 cm.
4. Deje rodar la esfera por el plano inclinado para cada una de las distancias definidas y tome el tiempo que demora en llegar al final del plano inclinado. Para cada longitud repita el experimento tres veces y el tiempo promedio será el tiempo que se debe consignar en la tabla.

Tabla 4-1: Tiempo obtenido en el experimento construcción de la función cuadrática

Longitud en centímetros (x)	Tiempo en segundos (y)
20	
40	
60	
80	
100	

Análisis manual:

Con los datos obtenidos, haga un ***análisis manual***, como se indica a continuación: *Usando papel milimétrico, dibuje un sistema de coordenadas cartesianas, ubique las parejas distancia - tiempo: La distancia en el eje horizontal y el tiempo en el eje vertical.*

Unir *los puntos obtenidos por medio de una curva aproximada*.

A partir de lo anterior:

a) Hagauna gráfica manualmente, donde se visualice la relación tiempo – distancia.

b) Con base en la gráfica, enuncie el tipo de relación que se obtiene.

c) Realice el procedimiento pertinente para que exprese la función aproximada.

Análisis utilizando tecnología: Es de aclarar que a partir de los resultados obtenidos, el modelo que describe el fenómeno puede variar según la precisión y registro en la toma de datos. Con el fin de obtener una mejor aproximación se utilizará ***la tecnología***, específicamente un software, el cual permite una mejor aproximación al modelo matemático que describe el fenómeno en estudio. Para éste caso se utiliza Excel, por su facilidad y disponibilidad. En el software se realizan los procesos de Regresión y Determinación, según lo siguiente:

1. Suba los datos en una hoja de Excel.

2. En la hoja de los datos active *insertar* y luego *dispersión de datos* y luego *puntos*.

3. Sobre los puntos obtenidos, de *clic derecho* y active *línea de tendencia*, luego se indíquele al sistema que presente la ecuación del gráfico y el R^2.

4. Todo lo anterior se hágalo para la regresión: exponencial, lineal, polinómica de grado dos.

Con base en lo anterior:

a) Grafique las relaciones tiempo - longitud para las regresiones obtenidas.

b) Identifique los modelos matemáticos correspondientes a cada regresión.

c) Determine el modelo más pertinente de los modelos obtenidos.

Resultados y Análisis de resultados: Escriba los resultados obtenidos y la función lograda.

4.6.3 Taller N° 3: La función inversa como modelo de la caída libre de un líquido

Objetivo: Identificar la función inversa por medio de los análisis de la caída libre de un líquido.

***Marco teórico*:** En diversos fenómenos naturales la relación entre las variables es inversamente proporcional, tales como la presión y el volumen, ya que a mayor presión menor volumen y viceversa, velocidad y tiempo, ya que a mayor velocidad menor tiempo. En el experimento que se propone la idea es demostrar que la relación tiempo - diámetro en la caída de un líquido en un recipiente abierto, es inverso.

En otras palabras, si a y b son magnitudes inversamente proporcionales, existe una constante k tal que $a * b = k$, de otro modo $a = \frac{k}{b}$ para $b \neq 0$
En general,la ecuación que representa una función inversa es no lineal,siendo de la forma $f(x) = \frac{k}{x^m}$donde m y k los parámetros de la función, los cuales son constantes.

En la caída de un líquido en un recipiente abierto, la relación tiempo – diámetro es inverso; es decir, mientras la variable independiente crece, la variable dependiente disminuye. El experimento diseñado busca demostrar dicha relación.

***Variables de estudio**:* Para la función de interés, las variables de estudio son: Tiempo de caída y el diámetro de salida de un líquido.

Material didáctico

- Una botella de forma cilíndrica de plástico. Es de anotar que se puede utilizar cualquier recipiente que tenga forma definida, preferiblemente cilíndrica.

- Tapas de plástico de diferentes colores, con orificios centrales de diámetros definidos a saber: Una azul de 2,5 mm, una roja de 3,5 mm, una amarilla de 4,5 mm y una verde de 5,5 mm.

- Soporte universal con gancho de aro.

- Recipiente de plástico para recibir el agua.

- Regla y cronómetro.

Figura 4-3: Caída libre de un líquido (agua)

Fuente: Laboratorio de Física UNAD

Procedimiento

1. Coloque la tapa azul que tiene el orificio con diámetro de 2,5 mm y con el dedo se tapa el orificio de tal manera que no se escape agua.

2. Llene la botella una cantidad fija de agua. Haciendo dos marcas marcadas como *a* y *b*, donde *a* es el nivel más alto y *b* el nivel más bajo. Para iniciar el experimento, el nivel del agua debe estar en la marca*a*.

3. Quite el dedo del orificio, el agua empieza a salir, simultáneamente se activa el cronómetro y se toma el tiempo que tarda el agua del nivel *a* al nivel *b*. Las marcas *a*y*b* deben estar en la parte completamente cilíndrica del recipiente.

4. Repita los puntos 1, 2 y 3 para los demás diámetros.

5. Realice 7 repeticiones para cada diámetro.

En la siguiente tabla consigne los tiempos obtenidos en el experimento para cada diámetro.

Tabla 4-2: Tiempo de Salida del agua diámetro 5,5 mm.

	Volumen Definido						
	Repetición 1	Repetición 2	Repetición 3	Repetición 4	Repetición 5	Repetición 6	Repetición 7
d = 2,5							
d = 3,5							

d = 4,5							
d = 5,5							

6. Construya una tabla que relacione tiempo y diámetro, el tiempo será el promedio obtenido de las siete repeticiones para cada diámetro.

Tabla 4-3: Tiempo salida de agua, resultados del experimento

Diámetro	*Tiempo*
2,5	
3,5	
4,5	
5,5	

Análisis manual: Con los datos obtenidos hacer una gráfica en un sistema cartesiano de manera manual, tomando en el eje x el diámetro y en el eje y el tiempo con escalas adecuadas.

Con base en lo anterior:

a) Grafique la relación tiempo – diámetro en la caída libre de agua.

b)Prediga la relación aproximada lograda.

c) Construya una función para la relación obtenida.

Análisis utilizando tecnología: Como en el caso anterior, para una mejor aproximación utilizar el software Excel. Los mismos principios estudiados sobre regresión y determinación son aplicados en este caso. Como el modelo se presume de la forma: $t = \frac{B}{d^m}$Donde B es una constante, d es el diámetro y $t$el tiempo, utilizando Excel, hacer el proceso de regresión y determinación. El programa presenta tanto el modelo como el coeficiente de determinación.

Con base en lo anterior:

a) Grafique la relación tiempo – diámetro, utilizando regresión exponencial y polinómica.

b) Escriba los modelos obtenidos y su respectivo coeficiente de determinación.

c) Defina el modelo más apropiado para el fenómeno estudiado.

Resultados y Análisis de resultados: Aquí se deben consignar los resultados y la función obtenida.

4.6.4 Taller N° 4: La función logarítmica como modelo de la caída libre de un líquido

Objetivo: Identificar la función logarítmica por medio de los análisis de la caída libre de un líquido.

***Marco teórico*:** Hay fenómenos en diversas ciencias donde la función logarítmica es la forma de explicar dichos fenómenos, por ejemplo la intensidad de un terremoto, la intensidad de sonido; el cual se mide como: $D = Log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, el vuelo de naves espaciales, el crecimiento de niños hasta adolescentes, la edad de los fósiles y muchos otros. Los logaritmos aparecen por los estudios de Naiper (Neper) matemático Ingles que en 1.500 propone dicha operación. Logaritmo proviene de "Logos-Arytmos que significa número de razón. En la función logarítmica $f(x) = kLog(x) + c$los parámetros son k y c, son constantes.

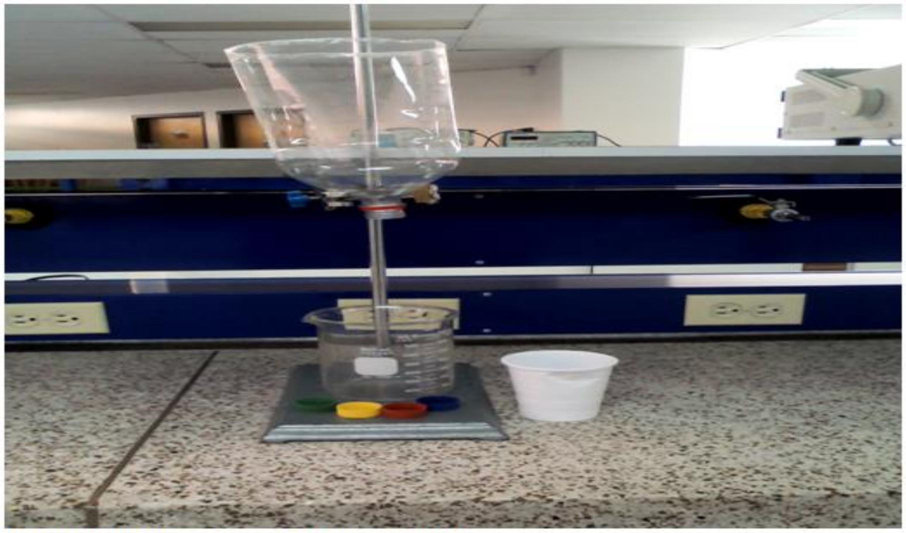
La caída de un líquido en un recipiente abierto, la relación tiempo – volumen es de tipo logarítmica para un diámetro fijo de 3,5 mm. El experimento diseñado busca demostrar dicha relación.

Variables de estudio*:* Para la función de interés las variables de estudio son: Tiempo de caída y volumen de líquido desalojado.

Material didáctico

- Una botella de plástico de forma cilíndrica, la cual se marca con $V_0, V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\ y\ V_6$, obteniendo 6 niveles de volumen, donde V_1 es el nivel más bajo y V_6 el nivel más alto, entre nivel y nivel la altura debe ser la misma. Las marcas se debe hacer en la parte cilíndrica de la botella.
- Una tapa plástica con un orificio en el centro, de diámetro 3,5 milímetros.
- Soporte universal con gancho de aro.
- Recipiente de plástico para recibir el agua.
- Regla y Cronómetro.

Figura 4-4: Caída libre de un líquido (agua)



Fuente: Laboratorio de Física UNAD

Procedimiento

1. Coloque la tapa de 3,5 mm de diámetro; la de color rojo, en la botella.

2. Tape el orificio con el dedo, sin dejar que se derrame gotas de agua.

3. Llene la botella de agua hasta el nivel V_6 medido en unidades de agua (ua)

4. Destape el orificio y simultáneamente se registra el tiempo que le toma el nivel del agua cada vez que pasa por cada una de los niveles$V_5, V_4, V_3, V_2, V_1, V_0$ es de aclarar que para V_6el tiempo es cero, ya que es donde inicia el experimento y V_0 será el tiempo máximo ya que es donde termina el mismo. Repita el experimento tres veces.

5. Tome el tiempo total de vaciado y se le resta el tiempo de la marca inmediatamente anterior. En la tabla siguiente colocar el tiempo al pasar el nivel del agua por cada marca. Recuerde que el tiempo será el promedio de las tres repeticiones.

Tabla 4-4: Cálculo para obtener el tiempo a los diferentes volúmenes

Marca	Tiempo	Volumen	Tiempo de Vaciado
V_6	**0**	1	Tiempo en V_0 – Tiempo en V_1
V_5		2	Tiempo en V_0 – Tiempo en V_2

V_4		3	Tiempo en V_0 – Tiempo en V_3
V_3		4	Tiempo en V_0– Tiempo en V_4
V_2		5	Tiempo en V_0 – Tiempo en V_5
V_1		6	Tiempo en V_0– 0
V_0			

6. Coloque los datos de volumen en la siguiente tabla.

Tabla 4-5: Tiempo a diámetro constante para diversos volúmenes

	V_1 = 1	**V_2 = 2**	**V_3 = 3**	**V_4 = 4**	**V_5 = 5**	**V_6 = 6**
d = 3,5						

A partir de losresultados obtenidos, realizar los siguientes análisis.

Análisis manual: Con los puntos obtenidos y los antecedentes sobre la construcción de la función cuadrática e inversa, se puede hacer el análisis manual para el caso en estudio.

Con base en lo anterior:

a) Grafique la relación tiempo – volumen en la caída libre de agua

b)Prediga la relación aproximada de acuerdo a la gráfica.

c) Construya una función para la relación obtenida.

Análisis usando tecnología: Como en los casos anteriores, para una mejor aproximación utilizar el software Excel. Los mismos principios estudiados sobre regresión y determinación son aplicados para este caso. Como el modelo se presume de la forma
$t = kLog(V) + c$,Utilizando Excel, hacer el proceso de regresión y determinación.

Con base en lo anterior:

a) Grafique la relación tiempo – volumen, utilizando regresión lineal, polinómica y Logarítmica.

b) Escriba los modelos obtenidos y su respectivo coeficiente de determinación.

c) Defina el modelo más apropiado para el fenómeno estudiado.

Resultados y Análisis de resultados: Aquí se deben consignar los resultados y la función obtenida.

4.6.5 Taller N° 5: La función cosecante como modelo del movimiento en el plano inclinado

Objetivo: Identificar la función cosecante por medio del análisis del movimiento en el plano inclinado

***Marco teórico*:**Diversos fenómenos naturales son explicados por funciones de tipo periódico, como las funciones trigonométricas, se dice un fenómeno periódico aquellos que se repiten cada cierto tiempo en las mismas condiciones, tal es el caso de la rotación de la tierra, el péndulo simple, los latidos del corazón y muchos otros.Es de anotar que las razones trigonométricas serán la clave para el desarrollo de este taller.

En el movimiento del plano inclinado, la aceleración lineal es paralelo a dicho plano, entonces: $a = gsen(\theta)$ la distancia de la forma: $d = \frac{1}{2}at^2$ siendo g la gravedad y θ el ángulo de inclinación, sustituyendo la aceleración en la ecuación de distancia se obtiene $d = \frac{1}{2}gsen(\theta)t^2$, Donde$t^2 = \frac{2d}{gsen(\theta)}$,por lo tanto$t^2 = \frac{2d}{g}csc(\theta)$, finalmente, $t = \sqrt{Acsc(\theta)}$Para $A = \frac{2d}{g}$que es una constante.

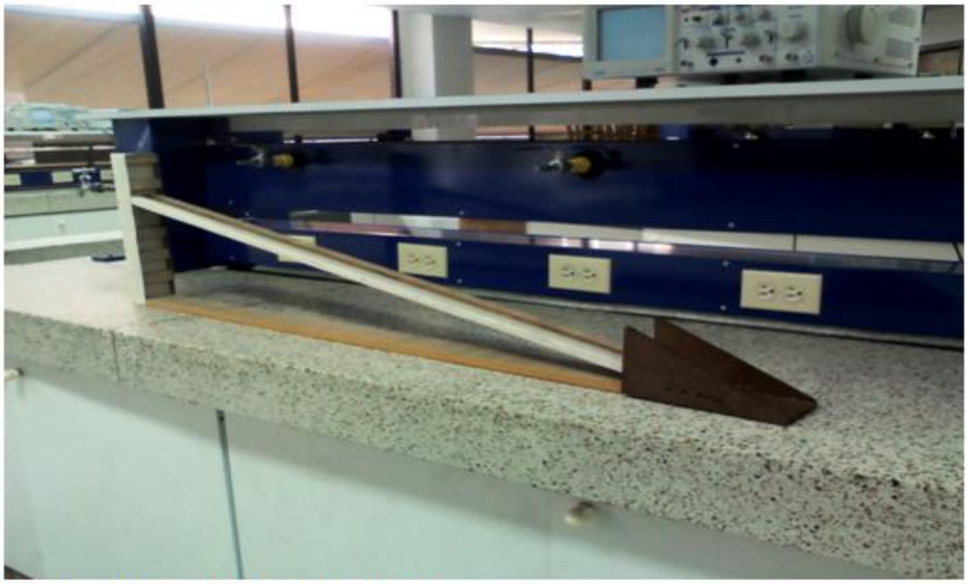
En el desplazamiento de una esfera por un plano inclinado, la relación tiempo – ángulo es de tipo trigonométrico. El experimento diseñado busca hallar dicha relación.

Variables de estudio*:* Para la función de interés las variables de estudio son: Tiempo de desplazamiento de la esfera y el ángulo de inclinación del plano inclinado.

Material didáctico

- Un plano inclinado en madera, con superficie pulida.
- Esferas en metal con superficie fina de masas 18,795; 35,624 y 110,44 gramos.
- Un cronómetro digital.

Figura 4-5: Plano Inclinado


Fuente: laboratorio Física UNAD

Procedimiento

1. Fije la longitud del plano inclinado, que para este experimento fue 100 cm.

2. Tome la esfera cuya masa es de 35,624 gramos.

3. Defina los ángulos de inclinación, para este experimento son: $8{,}5^0$, 11^0, 14^0, $17{,}5^0$ y 20^0.

4. Coloque la esfera en el sitio de partida para el ángulo establecido, se inicia con $8{,}5^0$ y se termina con 20^0, se toma el tiempo de recorrido de los 100 cm sobre el plano inclinado.

5. Repita el fenómeno por tres veces para cada ángulo, siendo el tiempo promedio el considerado para los cálculos.

En la tabla siguiente consignar los datos obtenidos.

Tabla 4-6: Tiempo de desplazamiento de la esfera respecto al ángulo

Angulo en grados (x)	Tiempo en segundos (y)
$8{,}5^0$	
11^0	
14^0	
$17{,}5^0$	
20^0	

Análisis manual: Siguiendo los modelos realizados en los casos anteriores, hacer el análisis manual para el caso que nos ocupa.

Con base en lo anterior:

a) Grafique la relación tiempo – ángulo del movimiento.

b)Prediga a quétipo de función corresponde.

Análisis usando tecnología: Como en los casos anteriores, para una mejor aproximación utilizar el software Excel. Partiendo de que el modelo se presume de la forma:
$t=\sqrt{Acsc(\theta)}$. Donde A una constante y θ el ángulo de inclinación. Siendo θ la variable independiente y t el tiempo que sería la variable dependiente. Aplicando regresión no lineal con ayuda del software Excel, realizar los procedimientos pertinentes.

Con base en lo anterior:

a) Grafique la relación tiempo – ángulo, utilizando regresión lineal, cuadrática y logarítmica.

b) Escriba los modelos obtenidos y su respectivo coeficiente de determinación.

c) Defina el modelo más apropiado para el fenómeno estudiado.

Resultados y Análisis de resultados: Aquí se deben consignar los resultados y la función obtenida.

4.7 Talleres experimentales de referencia

En esta parte del trabajo sepresentan los resultados obtenidos con los estudiantes de la muestra piloto, así tener un referente de comparación con los talleres experimentales planteados en la sección anterior.

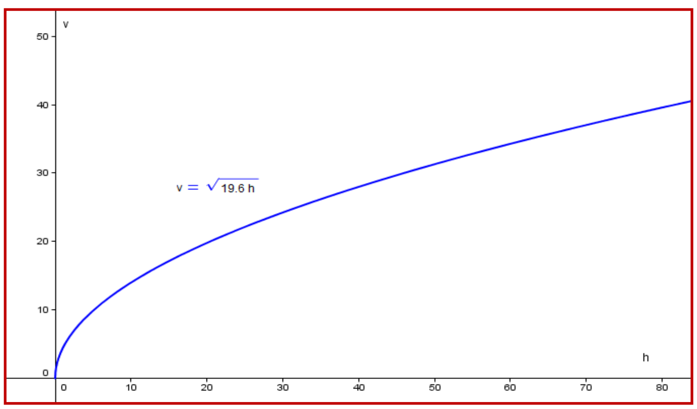
4.7.1 Taller N° 1: La función cuadrática como modelo de la caída libre de un objeto

Estudio de un fenómeno teórico: En seguida se presenta los resultados realizados con el grupo de referencia.

Solución

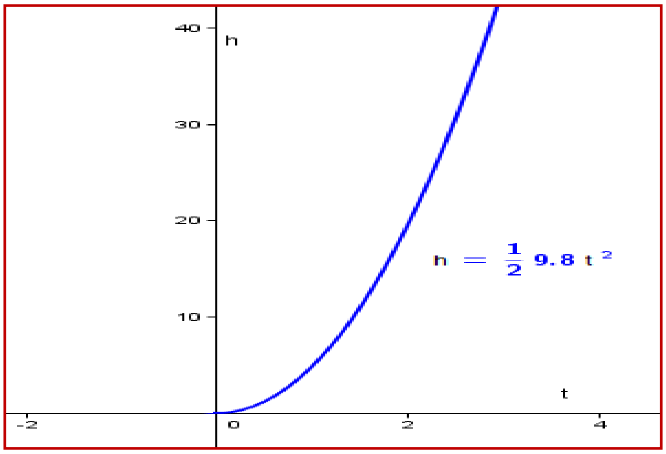
a) Como: $mgh = \frac{1}{2}mv^2$entonces$gh = \frac{1}{2}v^2$ y$v = \sqrt{2gh}$ En la ecuación se observa que la velocidad es función de la altura,$v = f(h)$Así, la función obtenida es de tipo radical.

Figura 4-6: Relación velocidad – altura



b) Reemplazando la velocidad en la función de altura, como $v = gt$ se obtiene: $\sqrt{2gh} = gt$, despejando h: $h = \frac{1}{2}gt^2$, que corresponde a una función cuadrática. Recordemos que el tiempo t toma valores positivos.

Figura 4-7: Relación altura – tiempo



c) la relación velocidad – altura es de tipo radical y la relación altura – tiempo es de tipo cuadrático.

4.7.2 Taller N° 2: La función cuadrática como modelo de movimiento en el plano inclinado

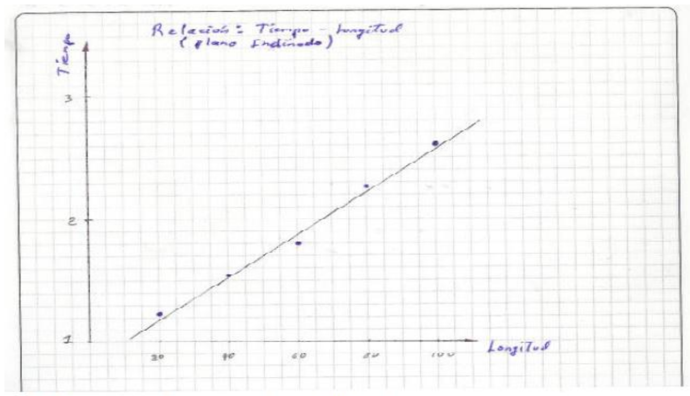
Estudio de un fenómeno experimental: En seguida se presentan los resultados realizados con el grupo de referencia.

Tabla 4-7: Resultados del tiempo utilizado a distancias definidas

Longitud en centímetros (x)	Tiempo en segundos (y)
20	1,22
40	1,54
60	1,80
80	2,26
100	2,60

Solución del análisis manual:

a)**Figura 4-8: Relación tiempo – longitud (Análisis manual)**



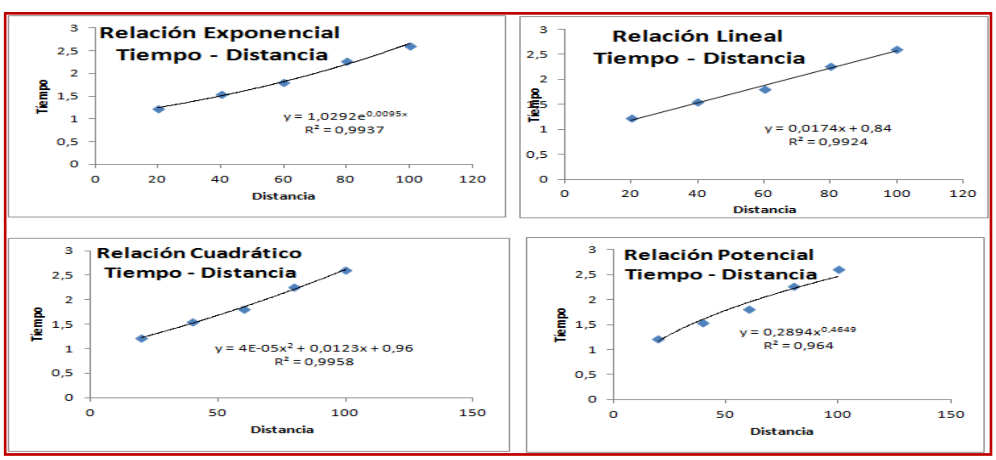
Fuente: Experimento plano inclinado, Laboratorio UNAD 2013

b) De acuerdo a la gráfica obtenida seobserva que la aproximación es una recta, así la relación tiempo – longitud sería lineal: $t = al + b$ Siendo t el tiempo, l la longitud, a y b los parámetros, que son constantes.

c) Para hallar la función, primero calculamos la pendiente; uno de los parámetros de este tipo de funciones. Sea $P_1(40; 1{,}54)$ y $P_2(80, 2{,}26)$. Entonces: $m = \frac{2{,}26-1{,}54}{80-40} = \frac{9}{500}$. Ahora a partir de la ecuación lineal se calcula el valor de b; es decir, el intercepto, tomando uno de los puntos, digamos (40; 1,54), entonces: $1{,}54 = \frac{9}{500}(40) + b$, despejando: $b = 18/25$Por consiguiente: $t = \frac{9}{500}l + \frac{18}{25}$

Solución del análisis utilizando tecnología: Con el uso de Excel, se realiza el proceso de regresión y determinación, así se resuelven las preguntas planteadas.

a) **Figura 4-9: Relaciones tiempo - longitud (Utilizando Regresión)**



b) Con base en las gráficas se puede observar que los modelos son de tipo:

Lineal: $t = 0{,}0174l + 0{,}84$ con R^2 = 0,9942

Cuadrático: $t = 4X10^{-5}l^2 + 0{,}0123l + 0{,}96$ con R^2 = 0,9958

Exponencial: $t = 1{,}0292e^{0{,}0095l}$ con R^2 = 0,9937

Potencial: $t = 0{,}2894l^{0{,}4649}$ con R^2 = 0,964

c) De acuerdo al punto b, el modelo más aproximado es el cuadrático, ya que tiene el R^2 más cercano a la unidad. El modelo matemático obtenido permite predecir el tiempo utilizado por una esfera que se deslizapor un plano inclinado, con un ángulo fijo de 8,5 grados y para una distancia entre 20 a 100 cm.

$$\boldsymbol{t = f(l) = 0{,}00004l^2 + 0{,}0123l + 0{,}96}$$

4.7.3 Taller N° 3: La función inversa como modelo de la caída libre de un líquido

Estudio de un fenómeno experimental: En seguida se presenta los resultados realizados con el grupo de referencia.

Tabla 4-8: Resultados de tiempo obtenidos a diámetro definido y volumen fijo

	Volumen Definido						
	Repetición 1	Repetición 2	Repetición 3	Repetición 4	Repetición 5	Repetición 6	Repetición 7
d = 5,5	41,02	41,17	40,85	40,96	41,12	40,47	41,62

Tabla 4-9: Resultados de tiempo obtenido a los diferentes diámetros

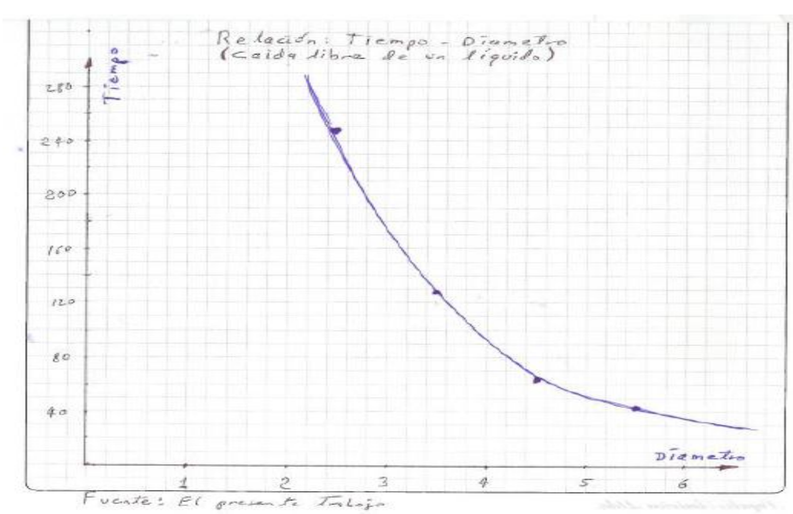
	Volumen Definido						
	Repetición 1	Repetición 2	Repetición 3	Repetición 4	Repetición 5	Repetición 6	Repetición 7
d = 2,5	257,88	258,19	260,15	259,86	263,39	260,08	260,10
d = 3,5	138,39	139,01	140,14	138,86	138,62	140,97	138,97
d = 4,5	63,28	62,96	61,97	63,21	62,32	63,80	63,04
d = 5,5	41,02	41,17	40,85	40,96	41,12	40,47	41,62

Tabla 4-10: Tiempo obtenido para cada diámetro

Diámetro	*Tiempo*
2,5	259,95
3,5	139,28
4,5	62,94
5,5	41,03

Solución del análisis manual:

a) **Figura 4-10: Relación tiempo – diámetro en la caída libre de un líquido (Análisis manual)**



b) De acuerdo a la gráfica obtenida seobserva que la aproximación es una curva de la forma $f(d) = \frac{k}{d^m}$ Como se soporta en el marco teórico, donde $f(d)$ es el tiempo y d es el diámetro.

c) Se hace la transformación: $Log(t) = Log(k) - m\,Log(d)$ Lo que se puede expresar analógicamente como $\boldsymbol{Y} = b - m\boldsymbol{X}$, que siendo una ecuación lineal, permite hacer de una manera más fácil el análisis correspondiente. Los valores de la tabla 4-10 los convertimos en logaritmo:

Tabla 4-11: Log diámetro y Log tiempo

Log diámetro	*Log tiempo*
0,397940009	2,414889822
0,544068044	**2,143888758**
0,653212514	1,798926739
0,740362689	**1,613101517**

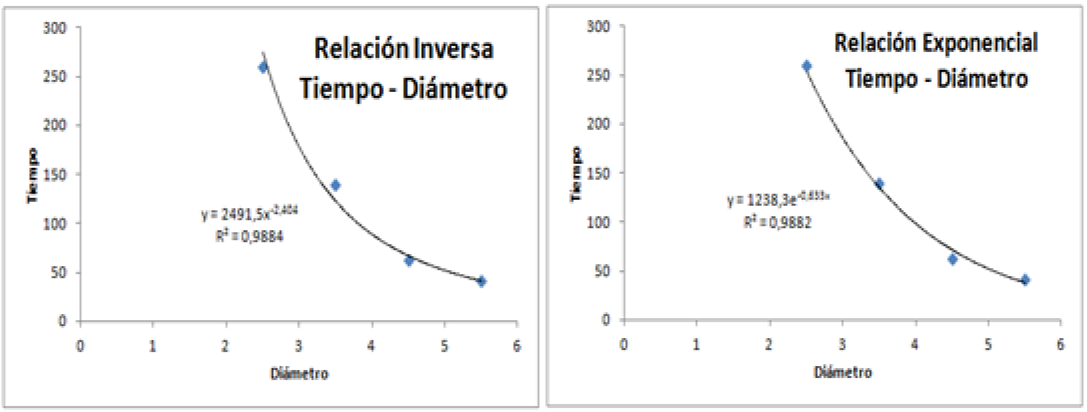
Se toman dos puntos cualesquiera, por ejemplo: P_1(0.54, 2.14) y P_2(0.74, 1.61). Entonces: $m = \frac{1{,}61-2{,}14}{0{,}74-0{,}54} = -\frac{265}{100} = -\frac{53}{20}$. Ahora a partir de la ecuación lineal se calcula el valor de b; es decir, el intercepto. Tomando P_1 = (0.54, 2.14), entonces $Log(t) = Log(k) - m\,Log(d)$, remplazando tenemos$\frac{214}{100} = \log(k) - \frac{53}{20}(\frac{54}{100})$, despejando: $\log(k) = \frac{3571}{1000}$ entonces $Log(t) = \frac{3571}{1000} - \frac{53}{20}Log(d)$, de donde$10^{Log(t)} = 10^{\frac{3571}{1000} - \frac{53}{20}Log(d)}$. Por consiguiente:

$$\boldsymbol{t = \frac{3723.9}{d^{2.65}}}$$

Claramente se observa que la relación tiempo diámetro es inversa.

Solución del análisis utilizando tecnología: Como en el caso anterior, para una mejor aproximación se utiliza el software Excel. Los mismos principios estudiados sobre regresión y determinación son aplicados en este caso.

a) **Figura 4-11: Relación tiempo - diámetro (Utilizando regresión)**



b) Modelo Inverso: $y = \frac{2491.5}{x^{2.404}}$ y R^2 = 0.9884, donde $y$es el tiempo y $x$es el diámetro.

Modelo Exponencial: $y = 1238.3e^{-0.633x}$ y R^2 = 0.9882, donde y es el tiempo y $x$es el diámetro.

c) De acuerdo a los resultados, el modelo más aproximado es el inverso, ya que el R^2 es el más cercano a la unidad. Entonces:

$$t = \frac{2491.5}{d^{2.404}}$$

Resultados y análisis de resultados: El tiempo de salida de agua de un recipiente en forma cilíndrica, abierto y de volumen definido, cuya tapa tiene un orificio de diámetro entre 2,5 y 5,5 mm, se puede determinar por medio de una función inversa.

Entonces:$\boldsymbol{t = \frac{2491.5}{d^{2.404}}}$

4.7.4 Taller N° 4: La función logarítmica como modelo de la caída libre de un líquido.

En seguida se presenta los resultados realizados con el grupo de referencia.

Tabla 4-12: Tiempo de caída libre de agua por orificio de diámetro fijo

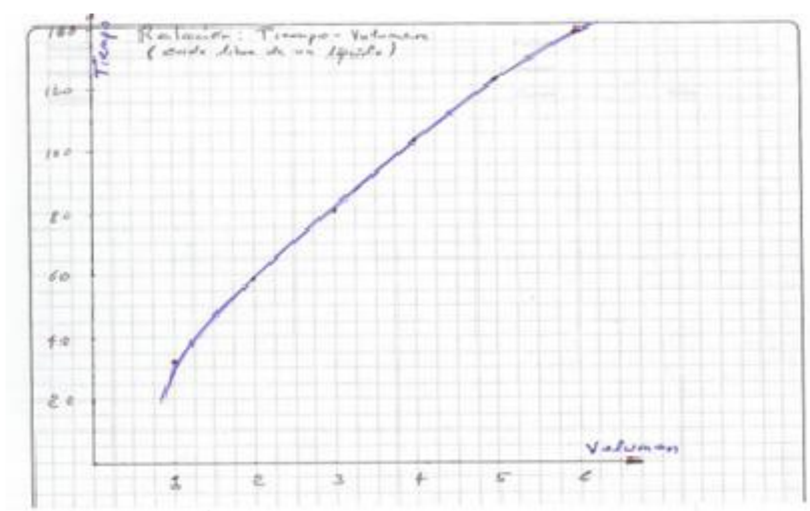
Marca	Tiempo	Volumen	Tiempo de Vaciado
V6	**0**	1	139,02 – 106,25 = 32,77
V5	16,95	2	139,02 – 79,09 = 59,93
V4	35,82	3	139,02 – 56,01= 83,01
V3	56,01	4	139,02 – 35,82 = 103,2
V2	79,09	5	139,02 – 16,95 = 122,07
V1	106,25	6	139,02 – 0 = 139,02
V0	139,02		

Tabla 4-13: Tiempo de caída de agua a volúmenes definidos

	$V_1 = 1$	$V_2 = 2$	$V_3 = 3$	$V_4 = 4$	$V_5 = 5$	$V_6 = 6$
d = 3,5	32,77	59,93	83,01	103,2	122,07	139,02

Solución del análisis manual:

a) **Figura 4-12: Relación tiempo – volumen en la caída libre de un líquido (Análisis manual)**

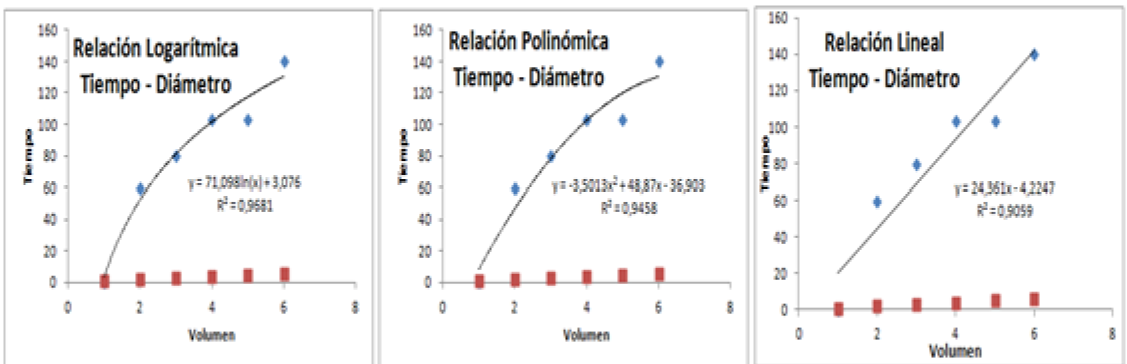


b)Como se observa en la figura 4-12, se presume que la relación es de la tipo logarítmica,
lo que se infiere por la forma de la curva.

c) Con base en la gráfica, el modelo puede ser de la forma: $t = kLog(V) + c$.

Solución del análisis usando tecnología: Como en los casos anteriores, para una mejor aproximación utilizar el software Excel. Los mismos principios estudiados sobre regresión y determinación son aplicados para este caso.

a-) **Figura 4-13: Relación tiempo - volumen (Utilizando regresión)**



b) Relación Logarítmica: $t = 71.098Ln(V) + 3.076$ y $R^2 = 0.9681$

Relación Polinómica: $t = -3.5013V^2 + 48.87V - 36.903$ y $R^2 = 0.9458$

Relación lineal: $t = 24.361V - 4.2247$ y $R^2 = 0.9059$

c) El modelo más apropiado es el logarítmico, ya que presenta el coeficiente de determinación más próximo a la unidad.

Resultados y Análisis de resultados: Para un recipiente cilíndrico abierto, la salida de agua por un orificio de diámetro 3,5 mm, el tiempo utilizado está relacionado con un modelo tipo logarítmico.

$$\boldsymbol{t = 71.098Ln(V) + 3.076}$$

4.7.5 Taller N° 5: La función cosecante como modelo del movimiento en el plano inclinado

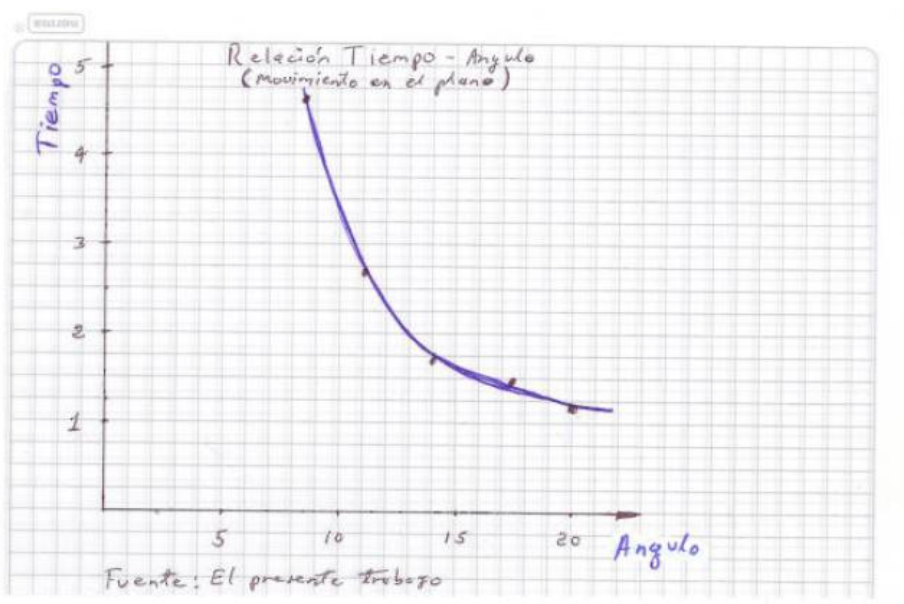
Estudio de un fenómeno experimental: En seguida se presenta los resultados realizados con el grupo de referencia.

Tabla 4-14: Resultados tiempo desplazamiento esfera y ángulo de inclinación

Angulo en grados (x)	Tiempo en segundos (y)
8,5	4,71
11	2,746
14	1,746
17,5	1,566
20	1,266

Solución del análisis manual:

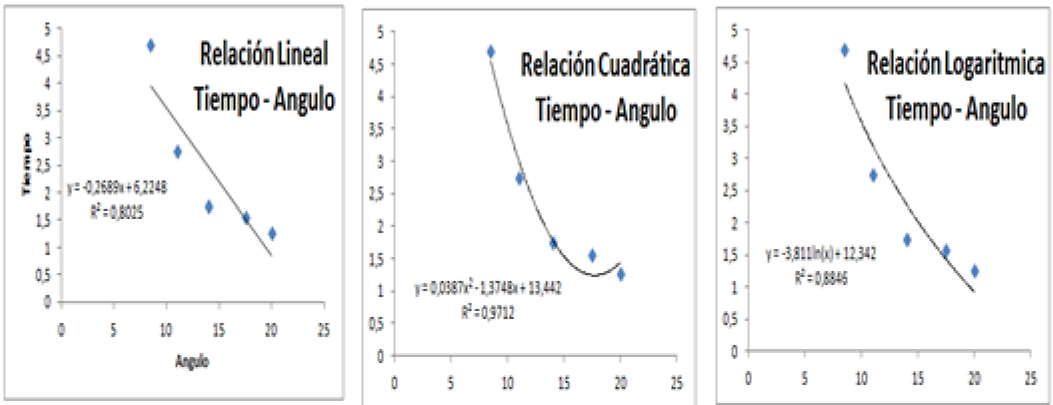
a) **Figura 4-14: Relación tiempo – ángulo movimiento en el plano (Análisismanual)**



b)De acuerdo a la forma de la gráfica, la función se presume inversa o cuadrática.

Solución del análisis usando tecnología:

a) **Figura 4-15: Relación tiempo - ángulo (Utilizando regresión)**



b) Relación Lineal: $y = -0{,}2689x + 6{,}2248$ y $R^2 = 0{,}8025$

Relación Cuadrática: $y = 0{,}0387x^2 - 1{,}3748x + 13{,}42$ y $R^2 = 0{,}9712$

Relación Logarítmica: $y = -3{,}811Ln(x) + 12{,}342$ y $R^2 = 0{,}8846$

c) Con base en los resultados el modelo más apropiado debería ser el cuadrático. Pero como en el experimento está involucrado el ángulo, se presume que la función debe ser trigonométrica.

Para hacer el análisis se graficó la función cosecante, con el fin de poder hacer una comparación.

Figura 4-16: Función csc(θ)

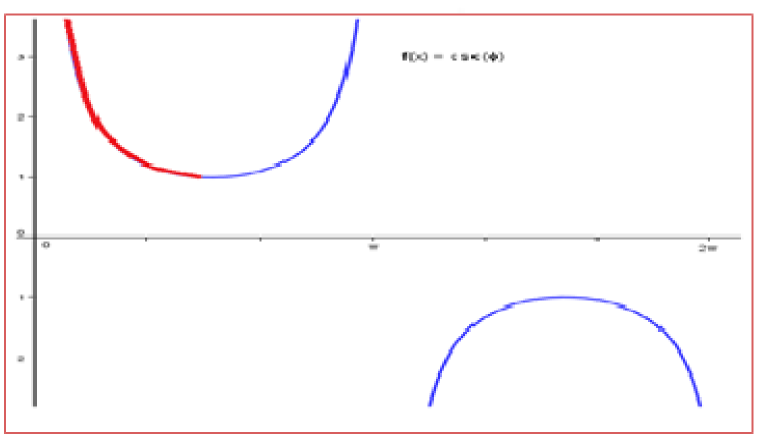
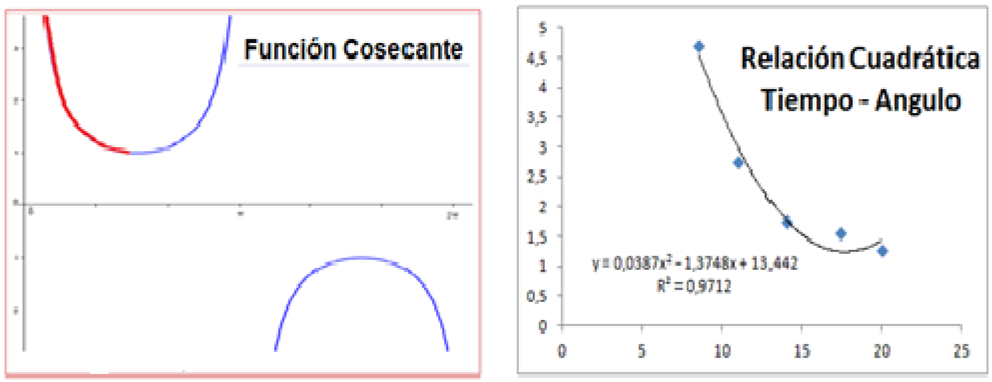


Figura 4-17: Comparación función cosecante y relación cuadrática



Observando en la gráficaanterior, la curva obtenida en el experimento (color negro) presenta una aproximación a la curva de la función cosecante en el intervalo (0, π/2). (Color rojo).

Resultados y Análisis de resultados: El modelo matemático obtenido permite predecir el tiempo utilizado por una esfera que se desliza por un plano inclinado, con una longitud fija de 100 cm.

$$\boldsymbol{t = f(\theta) = 4,5csc^{1/2}(\theta)}$$

Donde: $\sqrt{\frac{2d}{g}} = \sqrt{\frac{2*100}{9,6}} = 4,5$ Con base en el desarrollo teórico planteado.

5.Conclusiones y recomendaciones

a. Conclusiones

Con respecto a la propuesta es pertinente anotar que:

- Estuvo centrada en el modelamiento de fenómenos físicos a través de funciones polinómicas, logarítmicas y trigonométricas. Es de anotar que de estas se estudiaron previamente algunas de sus propiedades y su fundamento teórico. Se considera que el trabajo realizado permite una mejor comprensión del concepto de función y su relación con las ciencias físicas.

- Mostró; según los resultados, la identificación clara de una variable independiente y una variable dependiente, su manipulación y su interacción.

- Propicióla comprensión más cercana por parte del estudiante sobre un proceso donde hay variación y así estimular el pensamiento variacional, muy requerido en todas las áreas del conocimiento; ya que como se sabe, todo fenómeno presenta cambio, siendo importante identificar la clase de variación y el modelo teórico que mejor lo describe.

- Permitió que se identificaran varios tipos de funciones, comolas polinómicas y las trascendentes.

- Favoreció el manejo de software, que fue fundamental, para poder agilizar los análisis y obtener resultados más confiables, para el caso del presente trabajo, el software Excel muy útil, por su versatilidad y facilidad de acceso, aunque se pueden utilizar otros software como MatLab, Maple, Mathematica y otros.

- Fue muy interesante, ya que permitió al estudiante involucrarse en el estudio del tema, donde se observó bastante interés por hacer el trabajo, observar, analizar y conjeturar. Aquí fue importante ver que aunque los estudiantes llegaron con vacíos conceptuales, pudieron superar aquellos de mayor relevancia sobre el tema, ya que a través del proceso de toma de datos, manejo de las tablas, diseño de gráficas y análisis de los resultados, pudieron aclarar términos como: Variable independiente y variable dependiente, constantes o parámetros y relaciones; entre otros.

Ahora bien, es de anotar que en el trabajo no se profundizó en el estudio de los procesos estadísticos, sin embargo su uso fue suficiente para el propósito del trabajo. Recalcamos que nuestra intención era el modelamiento matemático, intentando no dispersar la atención de los estudiantes con cálculos que pudieran confundirlos o llevarlos a otros espacios distintos al tema de interés; en nuestro caso la función.

b. Recomendaciones

Como primera recomendación, es que se trabaje con otros fenómenos comunes como: Calentamiento de un líquido como el agua, el costo de una carrera de taxi y otros, lo que permitirá identificar más funciones y de diversas clases.

Para la construcción de la función inversa, se recomienda utilizar recipientes de diversas formas como cónicas, cúbicas y otras, para verificar si se mantiene el esquema de función inversa. De igual manera para las demás funciones construidas.

En cada experimento diseñado, sería interesante que se adicionaran otras variables y se realizará de nuevo, para obtener otras funciones.

Para el experimento de la salida libre del agua a diámetro definido, que en este caso fue 3,5 mm, y cuya relación fue logarítmica, se recomienda utilizar otros diámetros y verificar si la relación es similar o cambia.

6. Bibliografía

[1] Youschkevitch, A. The concept of function up to the middle of the XIX century. Archfor Hist. ExactSciences, 6, 1.976

[2] Escamilla, J, modelos Matemáticos para el estudio de la activación de la corteza cerebral, 1.999

[3] Azcarate, C, Deulofeu, J. Funciones y sus gráficas, Editorial Síntesis, España, 1.996

[4] Anzaldo, A, Delgado, J y Monroy, F. El legado matemático de Leonhard Euler, 300 años de su nacimiento. Universidad Autónoma Metropolitana, México, 2007.

[5] Camacho, C. Análisis de algunos problemas de física elemental por métodos geométricos. U. N. Revista Departamento física Universidad Nacional de Colombia, No 6 Abril 1992

[6] Canavos, G. Estadística y Probabilidad. Mc Graw Hill. México 1.998

[7] Cristancho, F. Física experimental I para Ciencias e Ingeniería. (Informes, gráficas, introducción al análisis de datos). U N, Bogotá, 2004.

[8] Díaz, R. Monroy, F. Laiton, O. Guía Metodológica del laboratorio de Física. U N, Bogotá, 2011

[9] Freund, M y M, Estadística Matemática con Aplicaciones, Prentice hall, 6º Edición, México, 2.000

[10] Kline, M. El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días. Alianza Editorial, Madria, 1992

[11] Mora, C. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional (México).

[12] Ohanian, H y Markert, J. Física para Ingeniería y Ciencias, Mc Graw Hill, tercera edición, México, 2.009

[13] Serway y Jewet, Física I, Thomson, tercera edición, México, 2.003

[14] Vásquez, S y Boubeé, C. El concepto de función a través de la historia, revista UNIÖN, No 16, Diciembre de 2008.